

## The image as a mind tool

Gian Marco Todesco



In last fifty years technology has made it incredibly easy to produce, edit and distribute still images and videos. We live submerged by a continuous flow of images and it is impossible to overestimate their importance in today's society. Movies, animations, drawings and photographs are used primarily to communicate, but they also represent an instrument of thought: in fact one can use an image to understand more in depth a complicated concept or draw a diagram to follow the thread of a thin idea that, without a graphic representation, might get lost in the unconscious mind. It is possible to capture the sense of an entire mathematical demonstration with a single figure or to graphically compute the solution of a problem with a sequence of diagrams; but one can also put on paper an error or a paradox. Even in painting there are examples where the aesthetic aspect is inextricably linked to the solution of a complicated and interesting problem. In the following pages, ten images will attempt to illustrate these concepts. Moreover using images in this context is a self-referential action that reminds of the extraordinary ability to reflect on itself that is a feature of the mind.

Keywords: impossible objects, proofs without words, visual computing.

The ability to name things (real objects but also abstract concepts) is an important prerogative of creative thinking. More generally, the mind knows how to represent complex entities by different, simpler ones: the latter can be words, but also other objects. An example of particular importance are the images that can be used to represent concrete things but also abstract concepts. The production of images, such as drawing, is an extraordinary communication tool, proverbially more effective than plain words. But it is simplistic to stop at this point, though important. In some sense, the mind must also communicate with itself: sometimes translating a concept into an image objectifies the concept, so one can observe it from a different angle and understand it in a better, deeper way. Many people, including the writer, can not find the solution to any problem without a piece of paper on which to draw sketches.

It seems to me that making images is a wonderful tool that the mind uses to understand and to invent; certainly it is not the only one, but it is one of the most effective. It is no coincidence that the word "image" has the same

root as "imagination" or that the expression "to figure out" means "to understand". In the following pages I have collected some examples of figures that seem closely connected to the activity of thinking.

Mathematics is a human activity that requires a lot of imagination. The first examples that I want to consider belong to the so-called "proofs without words". A brief verbal explanation is almost always useful or even indispensable, but the proofs that one can build on top of these figures are natural, immediate and memorable. Sometimes the ensuing understanding is so immediate that the theorem itself appears in a different light and become more clear and inevitable. Even the discovery of a new theorem (or the independent rediscovery of an old theorem) might stem from an enlightening image.

### The square of a binomial

At school, almost everyone studied the expression to calculate the square of a sum:  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . It is not difficult to develop the multiplication and check the formula correctness, but there is a clear and virtually instant-

## L'immagine come strumento della mente

Gian Marco Todesco

La tecnologia degli ultimi cinquant'anni ha reso incredibilmente facile produrre, modificare e diffondere immagini fisse o animate. Viviamo immersi in un fiume di immagini ed è difficile sottostimarne l'importanza nella società odierna. Filmati, animazioni, disegni e fotografie sono usati principalmente per comunicare, ma rappresentano anche uno strumento del pensiero: infatti è possibile usare un'immagine per comprendere in maniera più profonda un concetto complicato o disegnare uno schema per seguire il filo di un'esile idea che, senza un segno grafico, rischierebbe di perdersi nella parte non conscia della mente. È possibile catturare in una figura un'intera dimostrazione o usare una serie di diagrammi per calcolare la soluzione di un problema; ma si può anche rappresentare sulla carta un errore o un paradosso. Perfino nella pittura ci sono casi in cui l'aspetto estetico è indissolubilmente legato alla soluzione di un problema complicato e interessante. Nelle pagine seguenti verranno presentate dieci immagini che cercano di illustrare questi concetti. E usare le immagini in questo contesto è un'azione autoreferenziale che ricorda quella straordinaria capacità di riflettere su se stesso che è caratteristica del pensiero.

Parole chiave: calcolo visuale, dimostrazioni senza parole, oggetti impossibili.

La capacità di dare nomi alle cose (oggetti reali, ma anche concetti astratti) è una prerogativa importante del pensiero creativo. Più in generale la mente sa rappresentare oggetti complessi mediante altri oggetti più semplici: questi ultimi possono essere parole, ma anche altri oggetti. Un esempio di particolare importanza sono le immagini, che possono rappresentare cose concrete, ma anche concetti astratti. Produrre immagini, ad esempio disegnare, è uno straordinario strumento di comunicazione, proverbialmente più efficace delle parole. Ma è riduttivo fermarsi a questo aspetto, pur importante. In qualche senso la mente deve comunicare anche con se stessa: a volte tradurre un concetto in forma di immagine permette di oggettivizzarlo in modo da poterlo poi osservare da un angolo differente e capirlo meglio, più in profondità. Molte persone, fra cui chi scrive, quando riflettono per cercare la soluzione di un problema non possono fare a meno di un blocco di carta su cui tracciare schizzi.

Mi sembra che la creazione di immagini sia, certamente non l'unico, ma uno fra gli strumenti più efficaci che la mente ha a disposi-

zione, per capire e per inventare. Non a caso la parola "immagine" ha la stessa radice del verbo "immaginare". Nelle pagine seguenti ho raccolto alcuni esempi di figure che mi sembrano strettamente connesse all'attività del pensare.

La matematica è un'attività umana che richiede moltissima immaginazione. I primi esempi che voglio considerare fanno parte della categoria dei cosiddetti "teoremi senza parole". In realtà una breve spiegazione in parole è quasi sempre utile o indispensabile, ma la dimostrazione che si può costruire attorno a queste figure è naturale, immediata e memorabile. A volte la comprensione che ne deriva è così diretta che il teorema stesso sembra presentarsi sotto una luce diversa e diventare più chiaro e inevitabile. Anche la scoperta di un nuovo teorema o la riscoperta autonoma di un vecchio teorema possono seguire, a volte, la strada della visualizzazione.

### Il quadrato del binomio

A scuola quasi tutti abbiamo studiato l'espressione per calcolare il quadrato di una somma:  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . Non è difficile svolgere

neous demonstration, based on a sketch (fig. 1). The figure is memorable and persuasive. Trying to figure out the similar picture for the cube of the sum is an interesting exercise that relies on our ability to think by images. The presence of the two cubes is immediately evident and, with a bit of concentration, it is possible to “see” the six parallelepipeds of two different types representing the mixed products (fig. 2).

**The Pythagorean Theorem**

The Pythagorean Theorem is a kind of pop star of mathematics and can not be missing from this list. The theorem statement is well known ( $a^2 + b^2 = c^2$ , where  $a$ ,  $b$  and  $c$  are the three sides of a right triangle, called cathetus – or legs – and the hypotenuse respectively), and more than 300 different demonstrations have been discovered (including one by Albert Einstein and another one by James Garfield, the twentieth President of the United States of America).

The proof represented in the figure is one of the most famous and simple (fig. 3).

The sum of the first integers

Images can even be used to prove theorems unrelated to geometry. A simple example (fig. 4) shows the formula for calculating the sum of the first  $n$  natural numbers.

According to a popular anecdote the formula was discovered by the famous mathematician Carl Friedrich Gauss (1777–1855) at the age of just eight years. His teacher had planned to keep the class busy by assigning the tedious task of summing all the numbers from 1 to 100. After a few seconds of reflection Gauss wrote directly 5050: the correct answer.

That story is probably not entirely true, but it teaches two correct points: Gauss was a precocious genius and facing a problem with the right approach saves time and effort.

**The square of Fibonacci numbers**

The last theorem I want to consider is much less known and is far from obvious. It can be shown without great difficulty using the induction principle, but the demonstration represented in the figure (fig. 5) is much more intuitive.

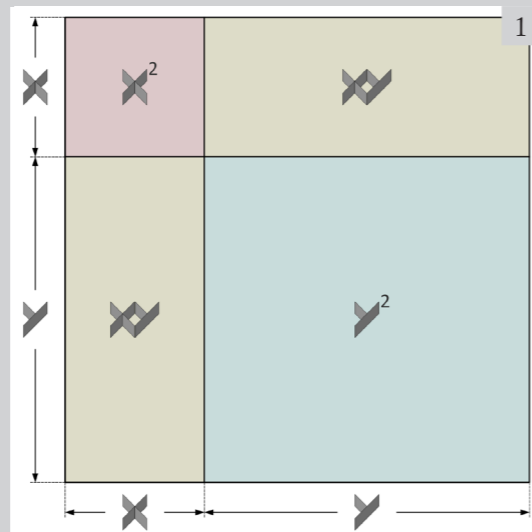


Figure 1 The formula for the square of a binomial is  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . In the figure, a square of side  $(x + y)$  is composed of a square with side  $x$ , a square with side  $y$  and two rectangles with sides  $x$  and  $y$ .

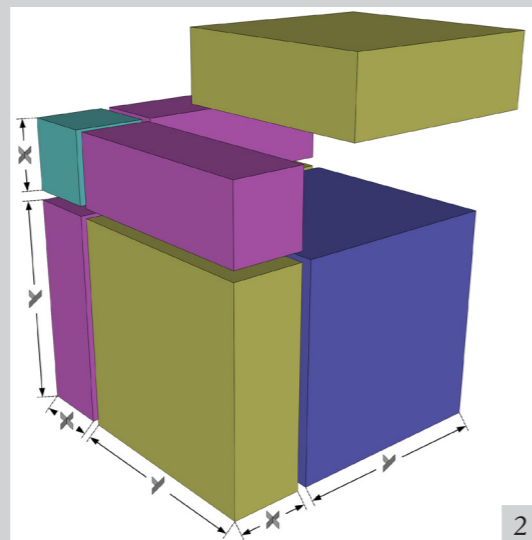


Figure 2 The formula for the cube of a binomial is  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ . In the figure, a cube of side  $(x + y)$  is composed of two cubes of side  $x$  and  $y$ , three parallelepipeds of sides  $x$ ,  $x$  and  $y$  (the long red ones) and three parallelepipeds of sides  $y$ ,  $y$  and  $x$  (the flat yellow ones).

Figure 3 A demonstration of the Pythagorean theorem. Each of two identical large squares, of side  $(a + b)$ , contains four identical right triangles, of sides  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . The parts of the two squares not covered by the triangles must have same area; in other words the sum of the areas of the two squares on the triangle legs (the red and the green ones, of areas  $a^2$  and  $b^2$ ) must equal the area of the square on the hypotenuse (the yellow square, of area  $c^2$ ).

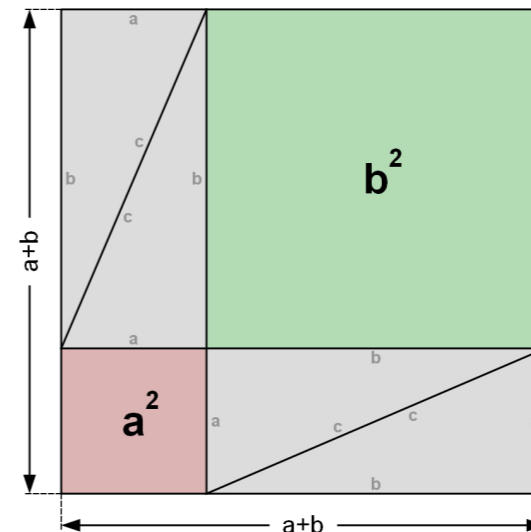
The theorem relates to a property of Fibonacci numbers, which are widely known and not only to the math enthusiasts (the sequence appears for example in several works by the artist Mario Merz). The first two terms are 1 and 1. Each term after the first two is the sum of the preceding two. Therefore the sequence begins with 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., and grows fast: the 45th term exceeds one billion and the hundredth term is the huge number 354,224,848,179,261,915,075. The relationship between two consecutive numbers becomes progressively closer to the golden ratio. The theorem states that the sum of the squares of the first  $N$  terms of the sequence equals the product of the  $N$ -th Fibonacci number and the

Figure 4 The sum of the first  $n$  integers  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$  equals  $n(n + 1)/2$ . In the figure, the sum is represented by squares arranged in a triangle (both the light ones or the dark ones): the large rectangle contains a number of squares equal to twice the sum. Its dimensions, measured in squares, are  $(n + 1)$  and  $n$ , therefore the total number of squares is  $n(n + 1)$ .

Figura 1 La formula per calcolare il quadrato del binomio è  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . In figura il quadrato di lato  $(x + y)$  si compone di un quadrato di lato  $x$ , un quadrato di lato  $y$  e due rettangoli di lati  $x$  e  $y$ .

Figura 2 La formula per calcolare il cubo del binomio è  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ . In figura il cubo di lato  $(x + y)$  si compone di due cubi di lato  $x$  e  $y$ , di tre parallelepipedi di lati  $x$ ,  $x$  e  $y$  (quelli lunghi di colore magenta) e di tre parallelepipedi di lati  $x$ ,  $y$  e  $y$  (quelli piatti di colore giallo).

Figura 3 Una dimostrazione del teorema di Pitagora. I due quadrati grandi (di lato  $a + b$ ) sono identici e contengono ciascuno 4 triangoli rettangoli identici (di lati  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ). Le aree non coperte dai triangoli devono essere uguali (essendo la differenza di aree uguali), quindi la somma dei due quadrati costruiti sui cateti (quello rosso e quello verde, di aree  $a^2$  e  $b^2$ ) è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa (quello giallo, di area  $c^2$ ).



Il prodotto e convincerci della correttezza della formula, ma è possibile disegnare una dimostrazione lampante e praticamente istantanea (fig. 1). Lo schema è memorabile e persuasivo. Provare ad immaginare la figura analoga, relativa al cubo del binomio, è un esercizio interessante che fa perno sulla nostra capacità di pensare per immagini. È subito evidente la presenza dei due cubi e con un po' di attenzione si individuano i sei parallelepipedi di due tipi diversi che rappresentano i prodotti misti (fig. 2).

**Il teorema di Pitagora**

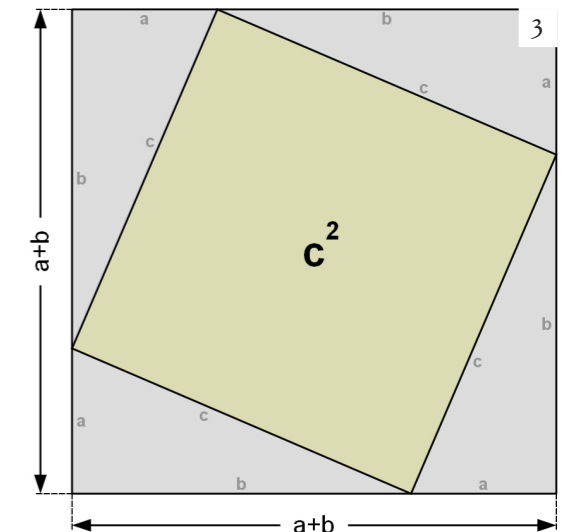
Il teorema di Pitagora è una sorta di *pop star* della matematica e non può mancare in questo elenco. Il teorema è ben noto ( $a^2 + b^2 = c^2$ , dove  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono i tre lati di un triangolo rettangolo, chiamati rispettivamente cateti e ipotenusa) e ne sono state scoperte più di 300 differenti dimostrazioni (fra cui una da Albert Einstein e una da James Garfield, ventesimo presidente degli Stati Uniti di America).

La dimostrazione rappresentata in figura è una delle più note e semplici (fig. 3).

**La somma dei primi numeri interi**

Le immagini sono molto utili anche per dimostrare teoremi non strettamente legati alla geometria. Un esempio semplice (fig. 4) spiega la formula per calcolare la somma dei primi  $n$  numeri.

Secondo un aneddoto popolare la formula fu

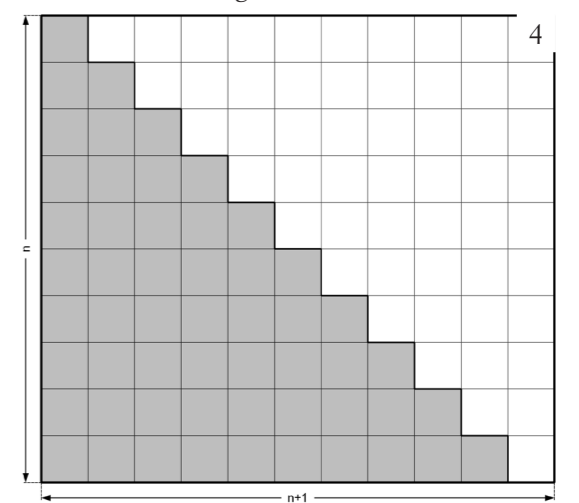


scoperta dal celebre matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) all'età di appena otto anni. Il suo maestro aveva pensato di tenere la classe occupata per un po' di tempo assegnando il tedioso compito di sommare i numeri da 1 a 100. Dopo qualche secondo di riflessione Gauss scrisse direttamente 5050: la risposta corretta.

Non è detto che la storia sia vera, ma contiene due insegnamenti corretti: Gauss è stato un genio precoce e affrontare un problema con l'approccio giusto permette di risparmiare tempo e fatica.

**I quadrati dei numeri di Fibonacci**

L'ultimo teorema che voglio considerare è molto meno noto e niente affatto ovvio. Può essere dimostrato senza grandi difficoltà utilizzando





next. In formula:  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ . Studying the figure the demonstration is almost immediate and the image has an aesthetically pleasing appearance, with the beautiful logarithmic spiral that is often found in nature (in shells, in cyclones, in galaxies, in sunflower pistils, etc.).

**Wrong proofs**

A very interesting feature of thought is the ability to make mistakes.

It is rightly perceived as a fault, but it may be an indispensable component of creative thinking. Our ability to perceive images shares a flaw with the rest of the mind: the risk of making mistakes. A tasty example is what is called “the chocolate paradox” (fig. 6). It seems possible to remove a chocolate square and recombine the rest in order to rebuild the entire tablet. This is obviously impossible, but in this case the image deceives our mind and makes the paradox believable.

**Visual calculations**

The great expressive power of an image is best appreciated when the image is very different from the object represented. In the previous examples we have used the design of a square to refer to the perfect square geometry. There is a difference between the drawing and the abstract object, but it is a difference that we will overlook. Sometimes however, the similarity is almost completely sacrificed for the sake of greater abstraction. Graphs and their representations are an example: points and arcs are used to describe a generic relationships between entities. Even when arcs indicate material things, such as roads or paths, a geometrically accurate representation is not expected: the underground maps are abstract representations of the links between stations, which can depart almost completely from the actual shape of the routes.

Graph arches often indicate abstract objects, such as relations. A graph can represent the network of friendships between people, an industrial process, a set of web pages with their links, the migratory paths of animal species, a map of the possible interactions between proteins in a cell, and so on.

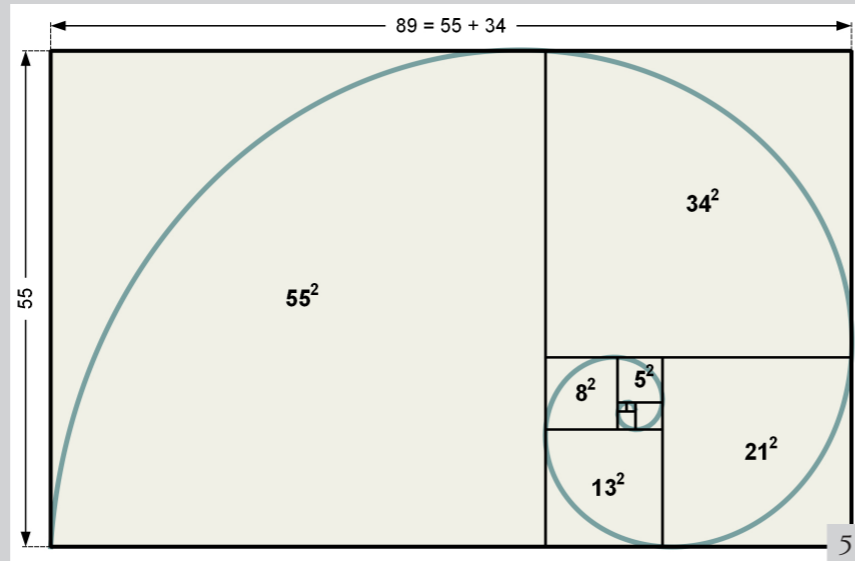


Figure 5  
The rectangle is made up of 10 squares whose sides (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55) follow the Fibonacci sequence: each number after the first two is the sum of the two preceding ones. The area of the whole rectangle is equal to the sum of the areas of all the squares. Its dimensions are the last given Fibonacci number (55) and the sum of the last two, which is equal to the next number (34 + 55 = 89). The figure shows that the sum of squares of the first  $n$  Fibonacci numbers is equal to the product of the  $n$ th number and the next one. The nice curve that touches the squares vertices is a logarithmic spiral, called “golden spiral”. It is not used in the demonstration.

Figure 6  
The paradox of the chocolate. On the left a chocolate bar is represented. It is made of  $4 \times 7$  squares and it is sliced into 4 pieces. On the right one of the pieces has disappeared, but it seems possible to rearrange the other three in order to reconstruct the entire original tablet. In this example the picture is maliciously misleading.

Figura 5  
Il rettangolo è composto da 10 quadrati i cui lati (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55) seguono la successione di Fibonacci: ogni numero, a partire dal terzo, è pari alla somma dei due precedenti. L’area del rettangolo è pari alla somma delle aree di tutti i quadrati. Le dimensioni del rettangolo sono l’ultimo numero di Fibonacci considerato (55) e la somma degli ultimi due che è uguale al numero successivo della sequenza (34 + 55 = 89). La figura dimostra che la somma dei quadrati dei primi  $n$  numeri di Fibonacci è pari al prodotto dell’ennesimo numero e il successivo. La spirale che lambisce i vertici dei quadrati è una spirale logaritmica, chiamata “spirale aurea” (non serve per la dimostrazione).

Figura 6  
Il paradosso della cioccolata. A sinistra viene rappresentata una tavoletta di cioccolata grande  $4 \times 7$  quadretti, tagliata in 4 pezzi. A destra uno dei pezzi è scomparso e gli altri tre sembrano potersi ridisporre in modo da ricostruire l’intera tavoletta originale. In questo caso l’immagine è maliziosamente fuorviante.

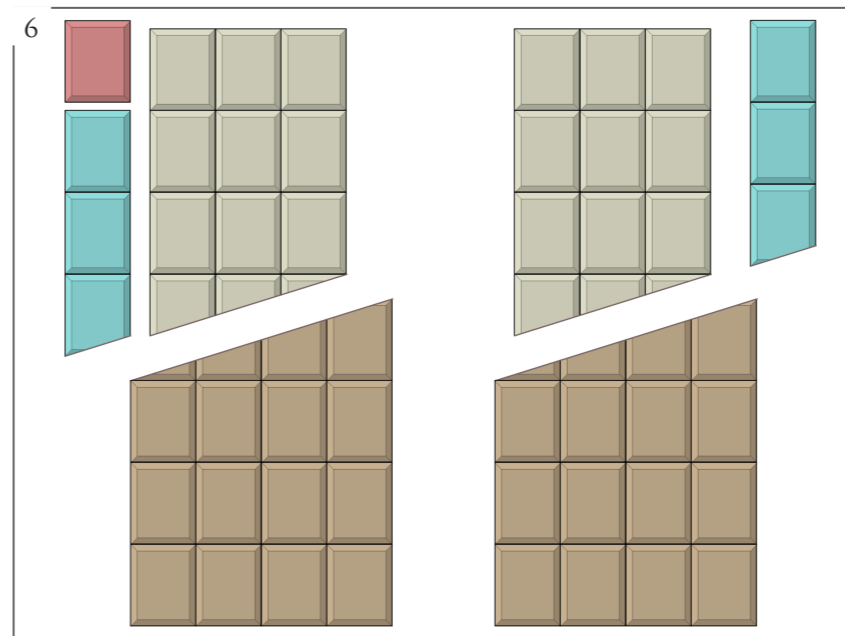
il principio di induzione, ma la dimostrazione rappresentata in figura (fig. 5) è decisamente più intuitiva.

Il teorema riguarda una proprietà dei numeri di Fibonacci, noti non soltanto agli appassionati di matematica (ad esempio, la successione compare in diverse opere dell’artista Mario Merz). I primi due termini sono 1 e 1. I termini successivi sono ognuno la somma dei due precedenti. La successione comincia con 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., e cresce in fretta: il 45esimo termine supera il miliardo e il centesimo termine è l’enorme numero 354.224.848.179.261.915.075. Il rapporto fra due numeri consecutivi diventa progressivamente sempre più vicino al rapporto aureo.

Il teorema che vogliamo considerare afferma che la somma dei quadrati dei primi  $n$  termini della successione è uguale al prodotto dell’ennesimo numero di Fibonacci e del successivo. In formula:  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ . Studiando la figura la dimostrazione risulta quasi immediata e l’immagine ha un aspetto esteticamente gradevole, con la bella spirale logaritmica che si trova spesso in natura (nelle conchiglie, nei cicloni, nelle galassie, nei pistilli dei girasoli, ecc.).

**Dimostrazioni sbagliate**

Una caratteristica molto interessante del pensiero è la capacità di sbagliare.



È giustamente percepita come difetto, ma potrebbe essere una componente indispensabile del pensiero creativo. La nostra capacità di percepire le immagini condivide con il resto della mente questa attività difettosa: il rischio di sbagliare. Un esempio gustoso è quello che viene chiamato “il paradosso della cioccolata” (fig. 6). Sembra possibile eliminare un quadrato di cioccolata e ricombinare il resto in modo da ricostruire l’intera tavoletta. Ovviamente la cosa è impossibile, ma in questo caso l’immagine inganna la nostra mente e rende il paradosso credibile.

**Calcolo visuale**

Il grande potere espressivo delle immagini si apprezza meglio quando l’immagine è molto diversa dall’oggetto rappresentato. Nei casi che abbiamo appena considerato si utilizza ad es. il disegno di un quadrato per indicare il quadrato perfetto della geometria. C’è differenza fra il disegno e l’oggetto rappresentato, ma è una differenza che cerchiamo di trascurare. A volte invece la somiglianza viene quasi completamente sacrificata in cambio di una maggiore astrazione. Un esempio sono i grafi e le loro rappresentazioni: punti ed archi che vengono usati per descrivere generiche relazioni fra entità. Anche quando gli archi indicano cose materiali, ad esempio strade o percorsi, non ci si aspetta una rappresentazione geometricamente fedele: le mappe delle metropolitane mostrano i collegamenti fra le stazioni in maniera astratta, prescindendo quasi completamente dalla forma del percorso effettivo.

Spesso gli archi indicano oggetti astratti, come ad esempio delle relazioni. Un grafo può rappresentare la rete di amicizie fra persone, un processo industriale, un insieme di pagine web con i loro link, i percorsi migratori di un insieme di specie animali, la mappa delle possibili interazioni fra proteine in una cellula, ecc.

Le tecniche sviluppate sul modello astratto hanno poi un’effettiva utilità in tutti i casi concreti che possono essere descritti dal modello. Oggi, in un mondo in cui le connessioni hanno un’enorme importanza, la teoria dei grafi è un campo di ricerca molto attivo e interessante.

Un problema classico riguarda la colorazione dei nodi di un grafo. Una colorazione è consi-



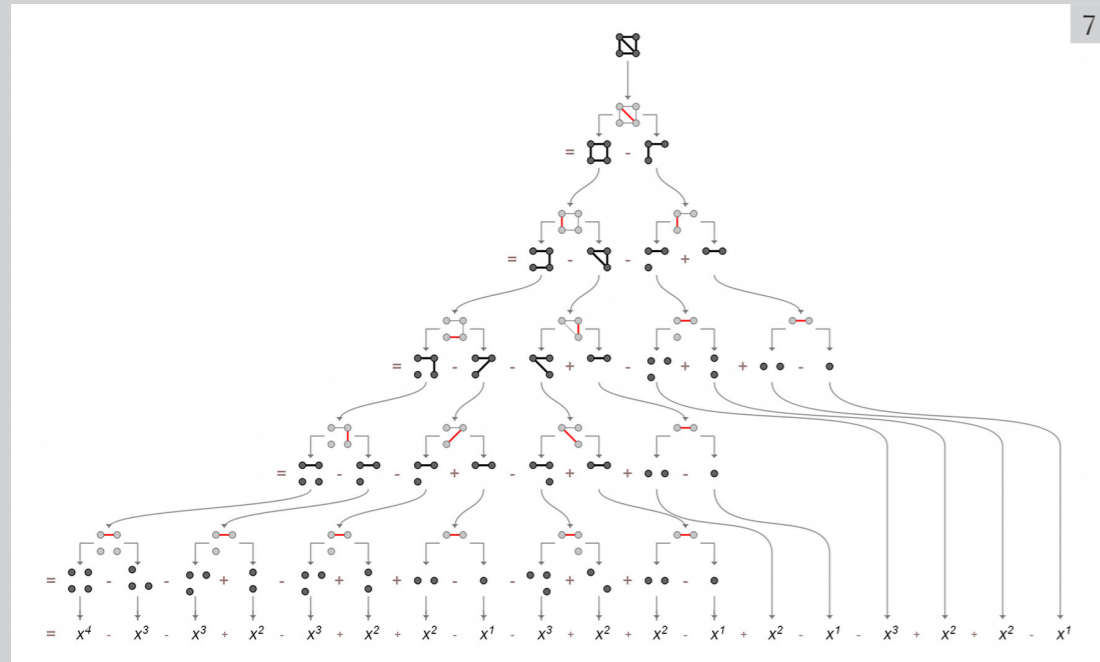


Figure 7  
An example of visual calculation. The first figure at the top (four points connected with five lines) represents a given graph of which we want to obtain its “chromatic polynomial”:  $p(x)$ . This would allow to compute the number of different ways to assigning  $x$  colors to the graph vertices such that no pair of connected vertices have the same color. To obtain the polynomial it is possible to use the “deletion-contraction” algorithm. It expresses the chromatic polynomial of a given graph as the difference between the chromatic polynomials of two simpler graphs, obtained respectively by deleting an arc and by fusing two connected vertices. The process continues until there are only graphs with no lines, for which the derivation is immediate. At the end of the process we get the answer:  $p(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$ . From that it is possible to see, e.g., that  $p(2) = 0$  (it is impossible to color this graph with only two colors) and  $p(3) = 6$  (there are six different coloring with three colors).

graphs. The process continues recursively and produces expressions with a growing number of increasingly simpler graphs. Eventually one will get the elementary graphs that can be directly converted into formulas, which can be algebraically added up to obtain the chromatic polynomial of the original graph (fig. 7).

of these paradoxical entities are a fascinating intellectual game, a tool to delve into the mechanisms of the drawing and the vision (eg. perspective) and ultimately a means of artistic expression.

An early example (and possibly unaware) can be found in a plate from Piranesi (1720–1778, fig. 8). In the past century many artists, such as Oscar Reutersvärd (1915–2002) and Maurits Cornelis Escher (1898–1972), enjoyed the conscious exploration of these images potential. One of the best known impossible figures is the Penrose triangle (fig. 9), published in a 1950 article written by the mathematician Roger Penrose with the psychiatrist Lionel Penrose, his father, but independently discovered



Figure 8  
*The Gothic Arch*, 1761, in *Prisons of invention* by Giovanni Battista Piranesi (1720–1778), pl. XIV. An early example of “impossible figure”: the stairway on the left is inserted between two columns that, at the top, are connected with an arc and appear coplanar. *Wikimedia Commons*. Wikimedia Foundation. 2004. [visited December 29, 2016]. Available by: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The\\_Gothic\\_Arch\\_LACMA\\_46.27.14.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Gothic_Arch_LACMA_46.27.14.jpg).

Figure 9  
The Penrose triangle. The archetypical example of an impossible figure.

### Ambiguity

As we have just seen the distance between an image and the represented object can be very large. In fact each image, even the most faithful reproduction of reality, encloses several different meanings at different levels. It is also possible that an image allows several contrasting interpretations. These images are usually ambiguous and their ambiguity is perceived as interesting. The «XY» magazine logo is an appropriate example: it can be interpreted as a two-dimensional diagram representing the two letters  $x$  and  $y$ , but it can also be interpreted as an axonometric projection of four rectangular panels intersecting at a right angle. One can assemble an image with many ambiguous parts connected in such a way that the resulting set is inconsistent. The whole image suggests a set of interpretations none of which is fully consistent. These images are called “impossible objects”. The invention and study

derata ammissibile se due nodi collegati da un arco hanno colori differenti. Trovare una colorazione ammissibile di un grafo è utile perché permette ad esempio di poter disegnare una carta geografica in cui stati adiacenti non hanno mai lo stesso colore o assegnare l'esecuzione di un complesso insieme di lavorazioni evitando che nello stesso momento vengano svolte due attività incompatibili (ad es. perché usano la stessa risorsa), ecc.  
Quante sono le diverse colorazioni ammissibili di un dato grafo? La risposta dipende dal numero di colori che si vogliono usare. Si può dimostrare che il numero di colorazioni ammissibili è sempre espresso da un semplice polinomio con un grado pari al numero di nodi del grafo: questo polinomio si chiama il “polinomio cromatico” del grafo.  
Una delle tecniche che permettono di derivare il polinomio cromatico si basa sulla manipolazione dei diagrammi che rappresentano il grafo dato. È una vera e propria tecnica di calcolo basata sulle immagini. Il grafo iniziale viene trasformato nella differenza di due grafi più semplici. Il processo continua ricorsivamente e ad ogni passaggio si ottiene un'espressione con un numero crescente di grafi sempre più semplici. Alla fine si ottengono dei grafi elementari che possono essere direttamente convertiti in formule, poi basta sommare algebricamente tutti i contributi per ottenere il polinomio cromatico del grafo originale (fig. 7).

Figure 8  
*L'arco gotico*, 1761, in *Carceri d'invenzione* di Giovanni Battista Piranesi (1720–1778), tav. XIV. Un esempio di “figura impossibile”: la scalinata a sinistra si inserisce fra due colonne che nella parte alta si uniscono con un arco e appaiono coplanari. *Wikimedia Commons*. Wikimedia Foundation. 2004. [visitato il 29 dicembre 2016]. Disponibile da: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The\\_Gothic\\_Arch\\_LACMA\\_46.27.14.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Gothic_Arch_LACMA_46.27.14.jpg).

Figure 9  
Il triangolo di Penrose. L'esempio archetipico di figura impossibile.

derata ammissibile se due nodi collegati da un arco hanno colori differenti. Trovare una colorazione ammissibile di un grafo è utile perché permette ad esempio di poter disegnare una carta geografica in cui stati adiacenti non hanno mai lo stesso colore o assegnare l'esecuzione di un complesso insieme di lavorazioni evitando che nello stesso momento vengano svolte due attività incompatibili (ad es. perché usano la stessa risorsa), ecc.

Quante sono le diverse colorazioni ammissibili di un dato grafo? La risposta dipende dal numero di colori che si vogliono usare. Si può dimostrare che il numero di colorazioni ammissibili è sempre espresso da un semplice polinomio con un grado pari al numero di nodi del grafo: questo polinomio si chiama il “polinomio cromatico” del grafo.

Una delle tecniche che permettono di derivare il polinomio cromatico si basa sulla manipolazione dei diagrammi che rappresentano il grafo dato. È una vera e propria tecnica di calcolo basata sulle immagini. Il grafo iniziale viene trasformato nella differenza di due grafi più semplici. Il processo continua ricorsivamente e ad ogni passaggio si ottiene un'espressione con un numero crescente di grafi sempre più semplici. Alla fine si ottengono dei grafi elementari che possono essere direttamente convertiti in formule, poi basta sommare algebricamente tutti i contributi per ottenere il polinomio cromatico del grafo originale (fig. 7).

### Ambiguità

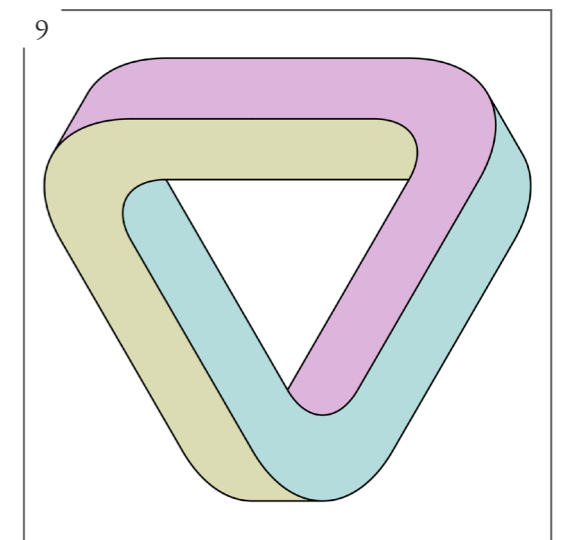
Come abbiamo appena visto la distanza fra un'immagine e l'oggetto rappresentato può essere anche molto grande. In effetti ogni immagine, anche la più fedele riproduzione della realtà, concentra più significati diversi a differenti livelli di lettura. È anche possibile che un'immagine ammetta più interpretazioni in contrasto fra loro. Queste immagini sono ambigue e in genere questa ambiguità viene percepita come interessante. Il logo della rivista «XY» è un esempio appropriato: può essere interpretato come uno schema bidimensionale che rappresenta le due lettere  $x$  e  $y$ , ma può anche essere interpretato come una proiezione assonometrica di quattro pannelli rettangolari che si intersecano incrociandosi ad angolo retto.

È possibile assemblare un'immagine che abbia più parti ambigue collegate fra loro in modo tale che l'insieme risultante sia inconsistente. L'intera immagine suggerisce una serie di interpretazioni nessuna delle quali è completamente coerente. Queste immagini si chiamano “oggetti impossibili”. L'invenzione e lo studio di queste entità paradossali sono un affascinante gioco intellettuale, un modo di studiare in maniera approfondita i meccanismi del disegno (ad es. la prospettiva) e della visione e infine anche uno strumento di espressione artistica.

Un esempio relativamente antico (e non si sa quanto consapevole) si trova in una tavola di Piranesi (1720–1778; fig. 8). Negli ultimi cento anni molti artisti, ad es. lo svedese Oscar Reutersvärd (1915–2002) e l'olandese Maurits Cornelis Escher (1898–1972), si sono divertiti a esplorare consapevolmente le potenzialità di questo tipo di immagini. Una delle figure impossibili più note è il triangolo di Penrose (fig. 9), citato in un articolo del 1950 scritto dal matematico Roger Penrose assieme allo psichiatra Lionel Penrose, suo padre, ma scoperto indipendentemente da Reutersvärd sedici anni prima, nel 1934 (quando l'artista aveva solo 19 anni).

### Ricerca matematica ed estetica

Un elemento di fascino nelle immagini precedenti è dato dalla sfida che lanciano alla mente di chi le osserva. Cercare di capire il “trucco”





by Reutersvärd sixteen years before, in 1934 (when the artist was only 19 years old).

#### Mathematical and aesthetical research

A charming element in the previous images is that they challenge the mind of the observer. Trying to figure out the “trick” creates a nice tension that can be used on an aesthetic key. This happens with the impossible or paradoxical images, but also for a much wider class of figures which contain some kind of problem to be solved that teases our rational curiosity. Several painters ventured into this borderland between the artistic and intellectual speculation. Lucio Saffaro (1929–1998), amateur mathematician, writer and painter, was a great explorer. Saffaro was ready to use the most appropriate instrument for his research, shifting almost seamlessly from writing mathematical articles to the creation of beautiful paintings with wonderful colors. His creations are often both mathematical and aesthetic. For example Saffaro discovered

and designed several new classes of polyhedra (solid objects bound by flat polygonal faces). The painting *Il poliedro M2 (opus CCLXIII)* that he created in 1985 shows one of these polyhedra: a solid bound by 240 identical equilateral triangles. He described this together with other new polyhedra in an article for the *Annuario Enciclopedico della Scienza e della Tecnologia* (Mondadori, 1986). This picture was presented at the Venice Biennale in 1986 and features as well as in the editorial by Roberto de Rubertis in the first issue of this magazine.

The image is beautiful, but difficult to read. One can sense the great regularity of the structure, but the figure is so unusual and new that it is quite hard to understand how the triangles are connected, let alone to be convinced that the construction with all identical equilateral triangles is possible at all.

The final image illustrates better than any speech the solution to the small riddle in Saffaro's painting (fig. 10).

#### Bibliografia / References

*Albert Einstein and the Pythagorean theorem*. Little Engineers of Florida. 2012. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://www.littleengineers-fla.com/?p=284>.

*Escher's "Ascending and Descending" in LEGO®*. Andrew Lipson's Home Page. 2002. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://www.andrewlipson.com/escher/ascending.html>.

*Fondazione Merz*. Fondazione Merz. 2013. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://fondazionemerz.org/mario-merz/>.

*Impossible World*. Impossible World. 2016. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://im-possible.info/english/index.html>.

*Proofs without words*. MathOverflow (StackExchange). 2011. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://mathoverflow.net/questions/8846/proofs-without-words>.

*Pythagorean Theorem and its many proofs*. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, Alexander Bogomolny. 2012. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>.

*Techniques for Adding the Numbers 1 to 100*. Better Explained. 2007. [visited November 8, 2016]. Available by: <https://betterexplained.com/articles/techniques-for-adding-the-numbers-1-to-100/>.

*The Explanation to the Infinite Chocolate Bar Trick*. Math and Multimedia, School math, multimedia, and technology tutorials. 2014. [visited November 8, 2016]. Available by: <http://mathandmultimedia.com/2014/07/22/explanation-infinite-chocolate-bars/>.

READ, R.C., 1968. An introduction to chromatic polynomials. *Journal of Combinatorial Theory*. 4 (1), 1968, pp. 52–71.

SAFFARO, L., 1986–87. Nuovissime operazioni sui poliedri platonici. In AA. VV., *Annuario EST–Mondadori 1986–87*, pp. 323–331.

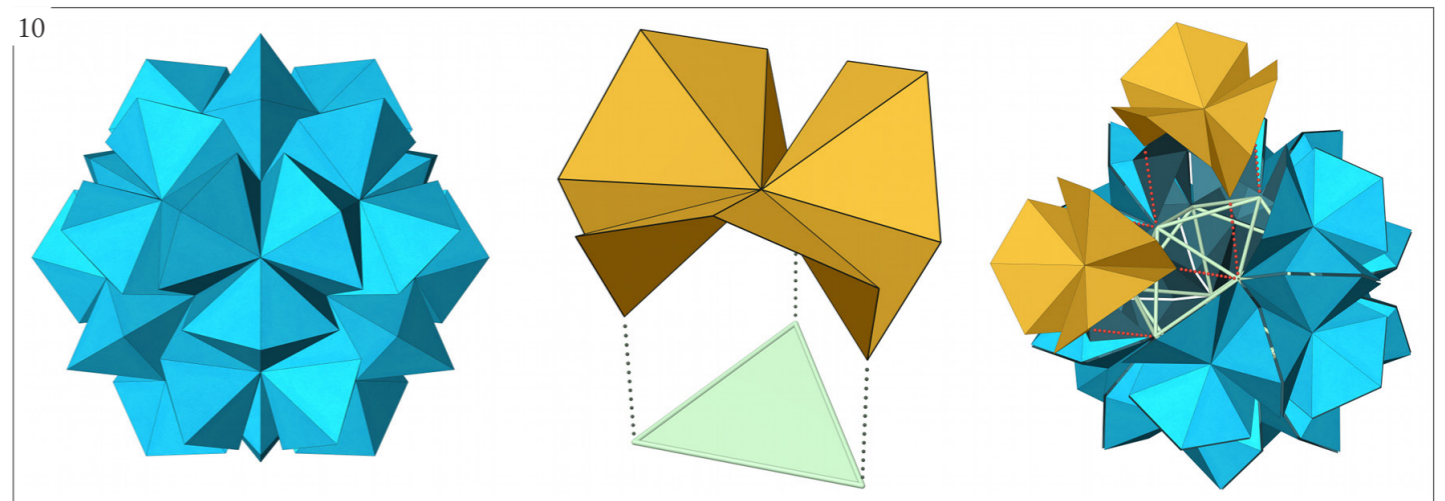
TODESCO, G.M., 2016. Saffaro in *Real–Time*. In EMMER, M. et al. (a cura di), *Imagine Math 5*. Atti del convegno Matematica e Cultura, Venezia, 2015. Roma: IVSLA, UMI, pp. 155–169.

Figure 10

The figure shows the structure of the polyhedron discovered by Lucio Saffaro and depicted in the painting *Il poliedro M2 (opus CCLXIII)*, 1985. On the left is a digital representation of the model, in the center the configuration of 12 equilateral triangles that must replace each triangular face of a icosahedron, on the right is the complete polyhedron, partially disassembled.

Figura 10

La figura illustra la struttura del poliedro scoperto da Lucio Saffaro e raffigurato nel quadro *Il poliedro M2 (opus CCLXIII)*, 1985. A sinistra una rappresentazione digitale dell'opera di Saffaro, al centro la configurazione di 12 triangoli equilateri che va sostituita alle facce triangolari dell'icosaedro, a destra il poliedro completo, parzialmente disassemblato.



crea una tensione piacevole che può essere usata in chiave estetica. Questo avviene per le immagini impossibili o paradossali, ma anche per una classe molto più ampia di figure che in qualche senso contengono un problema da risolvere e stuzzicano la nostra curiosità razionale. Diversi pittori si sono inoltrati in questa terra che si trova al confine fra la ricerca artistica e la speculazione intellettuale. Lucio Saffaro (1929–1998), matematico dilettante, scrittore e pittore ne è stato un grande esploratore. Saffaro era pronto ad utilizzare lo strumento più idoneo per la sua ricerca, passando quasi senza soluzione di continuità dalla scrittura di articoli matematici alla creazione dei suoi bei quadri dai colori meravigliosi. Le sue creazioni sono spesso sia matematiche che estetiche. Ad esempio Saffaro ha scoperto e disegnato diverse nuove classi di poliedri (oggetti solidi delimitati da facce piane). Il quadro *Il poliedro M2 (opus CCLXIII)* da lui creato nel 1985 rap-

presenta uno di questi poliedri: un solido delimitato da 240 triangoli equilateri tutti uguali da lui dettagliatamente descritto assieme ad altri nuovi poliedri in un articolo per l'*Annuario della Enciclopedia della Scienza e della Tecnologia* (Mondadori, 1986). Quest'immagine è stata presentata alla biennale di Venezia nel 1986 e compare come esempio anche nell'editoriale di Roberto de Rubertis nel primo numero di questa rivista.

L'immagine è splendida, ma di difficile lettura. Si intuisce la grande regolarità della struttura, ma essendo la figura così insolita e nuova è abbastanza difficile capire lo schema secondo il quale i triangoli sono legati fra loro. A maggior ragione non è immediato convincersi che la costruzione sia effettivamente possibile, con triangoli tutti equilateri e tutti uguali.

L'immagine conclusiva illustra meglio di qualsiasi discorso la soluzione del piccolo indovinello rappresentato dal quadro di Saffaro (fig. 10).