



UNIVERSITÀ
DI TRENTO

www.xydigitale.it

Year X, January - December 2025
Anno X, Gennaio - Dicembre 2025

*Critical review of studies
on the representation
of architecture
and use of the image
in science and art*

*Rassegna critica di studi
sulla rappresentazione
dell'architettura
e sull'uso dell'immagine
nella scienza e nell'arte*

16

**EVOLVING DRAWINGS,
PROJECTS, AND
SURVEYS**

**DISEGNI,
PROGETTI E RILIEVI
IN EVOLUZIONE**

Founder / Fondatore

Roberto de Rubertis

Scientific Direction / Direzione scientifica

Giovanna A. Massari

Scientific Committee / Comitato Scientifico

Lucio Altarelli, Paolo Belardi, Fabio Bianconi, Alessandra Cirafici, Gianni Contessi,
Antonella Di Luggo, Edoardo Dotto, Francesca Fatta, Fabrizio Gay,
Paolo Giandebiaggi, Francesco Maggio, Carlos Montes Serrano,
Philippe Nys, Franco Purini, Fabio Quici, Livio Sacchi, Rossella Salerno,
José Antonio Franco Taboada, Marco Tubino, Ornella Zerlenga

Editorial Direction / Direzione editoriale

Elena Casartelli, Fabio Luce, Cristina Pellegatta, Cristiana Volpi

Editorial Staff / Redazione

Margherita Parrilli, Lorella Pizzonia, Roberta Vitale

Contributor / Collaborazione

Francesco Fuggini

Scientific reviewers of the submitted papers / Revisori scientifici dei testi ricevuti

Giuseppe Amoruso, Leonardo Baglioni, Carlo Bianchini, Pierfederico Caliarì,
Alessandro Castagnaro, Santi Centineo, Enrico Cicalò, Luigi Cocchiarella, Daniele Colistra,
Mariella Dell'Aquila, Antonella Di Luggo, Tommaso Empler, Francesca Fatta, Marco Filippucci,
Alessandro Franceschini, Valeria Menchetelli, Leonardo Paris, Roberta Spallone

Editorial Office / Redazione

Università degli Studi di Trento – Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Meccanica
via Mesiano, 77 - 38123 Trento
tel. +39 0461 282669
www.dicam.unitn.it

Cover.	Marco Falsetti, <i>Re-ruined Rome</i> , ink on watercolor paper, 2025. © Marco Falsetti. <i>The drawing is part of a series dedicated to the future ruins of the most significant buildings in contemporary Rome. As in Piranesi's most famous views, the architectural element – in its role as a ruin – is taken as a starting point for a reflection on the monumental legacy. The drawing deliberately omits references to the circumstances that produced the ruin or to technological elements that might suggest a temporal contextualization. Although it is the ruin of a modern building, the scene is set in a landscape sensitively close to Piranesi's Rome, even evoking its picturesque features, such as the Pinelli-esque chariot, a fragment of an ancient past or a distant future.</i>
In copertina.	Marco Falsetti, <i>Roma nuove rovine</i> , china su carta acquerellata, 2025. © Marco Falsetti. <i>Il disegno è parte di una serie dedicata alle rovine future degli edifici più significativi della Roma contemporanea. Come nelle più celebri vedute piranesiane, il dato architettonico – nella sua valenza di rovina – è assunto come spunto di partenza per una riflessione sull'eredità monumentale. Il disegno omette volutamente riferimenti alle circostanze che hanno prodotto la rovina o a elementi tecnologici in grado di suggerire una contestualizzazione temporale. Pur trattandosi del rudere di un edificio della modernità, la scena è ambientata in un paesaggio vicino, per sensibilità, alla Roma piranesiana, della quale rievoca anche i caratteri pittoreschi come il carro di pinelliana memoria, frammento di un passato antico o di un futuro remoto.</i>
XY:	<i> rassegna critica di studi sulla rappresentazione dell'architettura e sull'uso dell'immagine nella scienza e nell'arte = Critical review of studies on the representation of architecture and use of the image in science and art – A. 10, n. 16 (gen.-dic. 2025) = Y. 10, no. 16 (Jan.-Dec. 2025) Trento: Università degli Studi di Trento; 2016 - . - v. : ill.; 30 cm. – Annuale ISSN (online): 2499-8346</i>
	ISBN (online): 978-88-5541-164-6 DOI: http://dx.doi.org/10.15168/xy.v10i16
	Università degli Studi di Trento via Calepina, 14 - 38122 Trento tel. +39 0461 283016 - 281722 casaeditrice@unitn.it
	
	Except where otherwise noted, contents on this journal are licensed with a Creative Commons Attribution – Share Alike 4.0 International License Eccetto ove diversamente specificato, i contenuti della rivista sono rilasciati con Licenza Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

Contents / Indice

4	<i>E.C., F.L., G.A.M., M.P., C.P., L.P., R.C.V., C.V.</i>	Editorial. A Necessary Adaptation Editoriale. Un adattamento necessario
10	<i>Franco Purini</i>	Drawing as Soul and Life / Il disegno come anima e vita
12	<i>Michele Emmer</i>	Drawing Hyperspace. From Pencil to Computer Graphics Disegnare l’iperspazio. Dalla matita alla <i>Computer graphics</i>
28	<i>Fabio Quici</i>	From Vitruvian <i>Firmitas</i> to Iconic Survival: OMA’s Netherlands Dance Theatre and the Afterlife of Architecture in Images / Dalla <i>firmitas</i> vitruviana alla sopravvivenza dell’architettura nelle sue testimonianze iconografiche: il Teatro nazionale di danza a L’Aia di OMA
44	<i>Laura N. Ferlito Graziano Testa</i>	Schinkel’s <i>Lehrbuch</i> . A Resilient ‘Form’ of Thought Il <i>Lehrbuch</i> di Schinkel. Una “forma” di pensiero resiliente
60	<i>Giulia Lazzaretto</i>	Abstract Fragments: The Transgression of Language in the Representational Logics of Zaha Hadid / Frammenti astratti: la trasgressione del linguaggio nelle logiche rappresentative di Zaha Hadid
76	<i>Hyun-Guk Ryu</i>	Visualising Power in Pyongyang: Political Architecture from Juche to Green / Visualizzare il potere a Pyongyang: l’architettura politica dalla Juche alla <i>green architecture</i>
96	<i>Valentina Castagnolo Anna C. Maiorano</i>	Images of the Survey: Interpreting Architecture between the Perceived and the Inaccessible / Le immagini del rilievo per una lettura dell’architettura tra il percepito e l’inaccessibile
114	<i>Fabrizio Banfi Elena Dellù Francesca R. Paolillo Diego Blanco</i>	From Buried Time to the Resilient Image: The Neanderthal Man and the Lamalunga Cave / Dal tempo sepolto all’immagine resiliente: l’Uomo di Neanderthal e la Grotta di Lamalunga
136	<i>Francesca Gasparetto</i>	Drawing for Art Conservation: A Possible Evolution of Its Language Il disegno per la conservazione delle opere d’arte: una possibile evoluzione del suo linguaggio
154	<i>Cesare Battelli Giovanni Pirari</i>	<i>Imago Resiliens</i> . Signs between the Visible and the Invisible in Artificial Imagination / <i>Imago Resiliens</i> . I segni tra visibile e invisibile nell’immaginazione artificiale
174	<i>Gabriele Casarano</i>	From Drawing to the Sensitive Model: The Epistemology of Data in Digital Architectural and Urban Representation Dal disegno al modello sensibile. Epistemologia del dato nella rappresentazione digitale architettonica e urbana
186	<i>XY 16 2025</i>	The Competition for the Cover Image Il concorso per l’immagine di copertina

In 1885, E.A. Abbott published *Flatland* in Great Britain, a book destined to be widely read beyond the English-speaking world. It tells the adventures of a square who discovers dimensions beyond the third Euclidean dimension. The writer, a mathematics professor, is aware that, in those years, mathematicians were becoming interested in geometric figures beyond three dimensions. Among the objects studied, the most famous was undoubtedly the four-dimensional cube, called the 'tesseract' or 'hypercube'. The mathematician Coxeter's book, in the 1920s, opened the door to higher dimensions. Many artists around the world learned of these studies through their respective mathematicians, through translations of *Flatland* into many languages, and through Charles Hinton's books on the fourth dimension, which would also be explored by the Cubists in France and by the work of Salvador Dalí. When, after the Second World War, the computer began its unstoppable journey, a few years later, a way to visualize what could be achieved with it was developed, and the hypercube came back into fashion: in short, a story that comes from afar and still looks far ahead.

Keywords: animation, *Flatland*, hypercube.

1. Computer Graphics

The computer became a reality at the end of World War II. There were several factors that brought it to the fore, but two were primary: the ideas of the famous mathematician Alan Turing and the problem of decrypting the *Enigma* system, used by the Nazis for encrypted messages during World War II. Turing had theorized the idea of a 'universal machine' capable of doing the work of any other machine: it would be enough to have just one and program it to perform the required tasks. Turing had thus conceived the idea of the computer. A few years later, the first Computer-Aided Design – CAD graphics systems began to appear to make numerical calculations visible, as well as printers that allowed the resulting images to be printed. The technique was developed by the Boeing Company, and it was a company engineer, William Fetter, who coined the term 'computer graphics' (Emmer 2021; fig. 1). One of the most significant research centers was Bell Telephone Laboratories Incorporated – Bell Labs, which mainly dealt with telephony, where Michael Noll worked, one of the first to understand that new technologies could have a

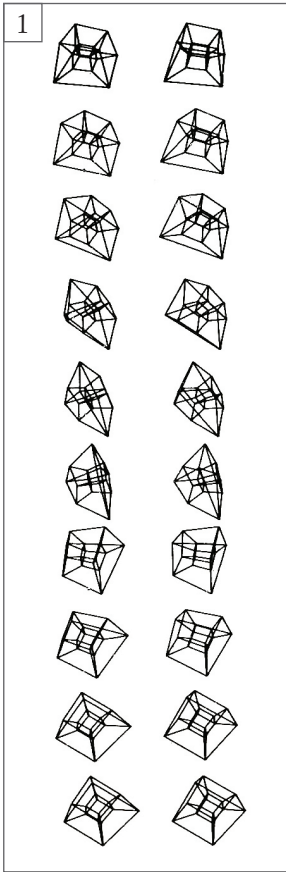
great impact on the artistic field as well. In a long article published in 2016 in «Leonardo» (Noll 2016), Noll recalled that with the intensive use of computers today, it is difficult to imagine that in the 1960s, the use of graphics as computer output was entirely new and innovative. Some of Noll's works were included in the exhibition *Computer-Generated Pictures*, organized in 1965 in a New York gallery, among which appeared the first 3D stereoscopic computer animation of a cube in the four-dimensional Euclidean space. Noll had thought of using the mysterious and evocative image of the 'hypercube' to make the object visible, following the suggestions of mathematicians of the previous century and rediscovering the models of Henry Parker Manning from 1914, in particular the one that lent itself best to animation (fig. 2). Taking up Noll's idea of using movement to better visualize objects in higher dimensions, in 1973, Thomas Banchoff and Charles Strauss created, using more sophisticated computers, a first version of the film *The Hypercube: Projections and Slicing* (Banchoff 1990). The short computer-animated film had a great scientific and artistic impact: it was screened at the

Figure 1
A. Michael Noll, *Hypercube*, 1964, computer graphics animation. © A.M. Noll, courtesy of the author.

Figura 1
A. Michael Noll, *Hypercube*, 1964, animazione grafica computerizzata. © A.M. Noll, per concessione dell'autore.

Nel 1885 E.A. Abbott pubblica *Flatland* in Gran Bretagna, un libro destinato ad avere una grande diffusione non solo nel mondo anglosassone. Si parla delle avventure di un quadrato che scopre le dimensioni oltre la terza dimensione euclidea. Chi scrive è un docente di matematica ed è al corrente del fatto che, in quegli anni, i matematici si stavano interessando alle figure geometriche a più di tre dimensioni. Tra gli oggetti studiati, il più famoso è senz'altro il cubo a quattro dimensioni, chiamato *tesseract* o *hypercube*. Il libro del matematico Coxeter, negli anni Venti, spalanca la porta alle dimensioni più alte. Molti artisti in varie parti del mondo vengono a conoscenza di questi studi tramite i matematici dei rispettivi paesi, ovvero grazie alle traduzioni in molte lingue di *Flatland* o ai libri di Charles Hinton sulla quarta dimensione, alla quale guarderanno anche i cubisti in Francia e l'opera di Salvador Dalí. Quando, dopo la Seconda Guerra Mondiale, il computer inizia la sua inarrestabile strada, dopo pochi anni viene elaborata una via per visualizzare ciò che si realizza con il computer e torna di gran moda l'ipercubo: insomma, una storia che viene da lontano e guarda ancora lontano.

Parole chiave: animazione, *Flatlandia*, ipercubo.



1. Computer graphics

Il computer è diventato una realtà alla fine della Seconda Guerra Mondiale. I fattori per i quali comparve sulla scena sono diversi, ma due sono i principali: le idee del famoso matematico Alan Turing e il problema di decriptare il sistema *Enigma*, usato dai nazisti per i messaggi cifrati durante la Seconda Guerra Mondiale. Turing aveva teorizzato l'idea di una "macchina universale" capace di svolgere il lavoro di qualsiasi altra macchina: sarebbe stato sufficiente averne una sola e programmarla per svolgere i compiti richiesti. Turing aveva così concepito l'idea del computer. Pochi anni dopo iniziarono a comparire i primi sistemi grafici di Computer-Aided Design – CAD per rendere visibili le elaborazioni numeriche, nonché le stampanti che consentivano di stampare le immagini ottenute. La tecnica fu sviluppata dalla Boeing Company e fu un ingegnere della compagnia, William Fetter, a coniare l'espressione *computer graphics* (Emmer 2021; fig. 1). Uno dei centri di ricerca più significativi furono i Bell Telephone Laboratories Incorporated – Bell Labs, che si occupavano principalmente di tele-

fonia, dove lavorò Michael Noll, uno dei primi a capire che le nuove tecnologie potevano avere un grande impatto anche in campo artistico. Noll, in un lungo articolo pubblicato nel 2016 su «Leonardo» (Noll 2016) ha ricordato che con l'utilizzo intensivo dei computer ai giorni nostri è difficile immaginare che negli anni Sessanta del secolo scorso l'uso della grafica come *output* di un computer fosse un fatto nuovo e innovativo. Alcune opere di Noll furono incluse nella mostra *Computer-Generated Pictures*, organizzata nel 1965 in una galleria di New York; opere tra le quali compariva la prima animazione computerizzata stereoscopica 3D di un cubo dello spazio euclideo a quattro dimensioni. Noll aveva pensato di utilizzare l'immagine, di per sé misteriosa ed evocativa, dell'«ipercubo» per rendere visibile l'oggetto seguendo i suggerimenti dei matematici del secolo precedente e riscoprendo i modelli di Henry Parker Manning del 1914, in particolare quello che si prestava meglio all'animazione (fig. 2). Riprendendo l'idea di Noll di utilizzare il movimento per meglio visualizzare oggetti in dimensioni più alte, nel 1973 Thomas Banchoff con

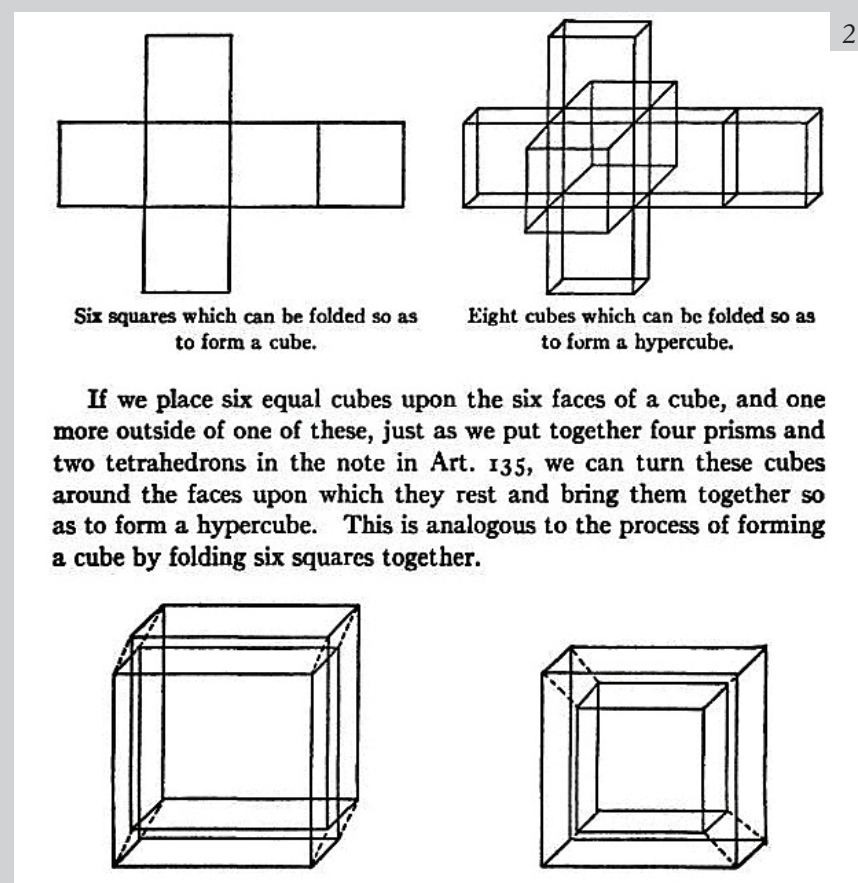
World Congress of Mathematicians in Helsinki (1978), and in 1986 it was included in the *Space* section, curated by Giulio Macchi, of the Biennale di Venezia (Emmer 1986).

These were the first-ever images of a moving hypercube, projected into three-dimensional Euclidean space. In the film, only the edges of the hypercube, their three-dimensional projections, are visible. These images are transparent to simultaneously capture the part of the geometric object facing the viewer and the part hidden behind and on the side. Banchoff later collaborated on the computer animations of the first films in the *Star Wars* series (fig. 3). But when did the first drawings of a hypercube – a four-dimensional cube – appear? When did people begin to think about drawing four-dimensional objects? We refer to Euclidean objects; it should be specified that time has nothing to do with the dimensions. In various fields of mathematics, objects had appeared that required more than three parameters to be described. In the concept of ‘manifolds’ in Riemannian geometry, spaces of any n -dimension appeared; we are in 1854 (Riemann [1854] 1994).

It had been well known for many centuries that there were five regular solids in Euclidean space; they were described in Plato’s *Timaeus* and are consequently called Platonic solids. Leonardo da Vinci drew these and many other types of solids for the famous treatise *Divina Proportione* by the mathematician Luca Pacioli, published in Venice in 1509 (Pacioli 1509).

2. Four-Dimensional Solids

The first definition of a three-dimensional cube was formulated in Euclid’s *Elements*, around 350 BC: “The cube is a solid figure contained within six equal squares” (Commandino [1575] 2009: 209v *diffinitioni* XXV). Euclid’s book served as the basis for humanity’s cultural formation and understanding of the idea of space. The first to determine the number of regular hypersolids in four-dimensional space was Ludwig Schläfli. Using H.S.M. (Donald) Coxeter’s later nomenclature, they are: regular simplex {3, 3, 3}, hypercube {4, 3, 3}, 16-cell {3, 3, 4}, 24-cell {3, 4, 3}, 120-cell {5, 3, 3}, 600-cell {3, 3, 5}; 3, 3, 3



means three triangles meeting three and three and so on (Coxeter 1947).

Schläfli’s work was not well received, and almost all his papers were rejected for publication. Only six years after his death, in 1901, his *Theorie der vielfachen Kontinuität* (Schläfli 1901), in which Schläfli discussed n -dimensional geometry and, in particular, four-dimensional solids (which he called ‘*polyschem*’), was published.

The lack of attention to Schläfli’s work is the reason why many believe that Washington Irving Stringham was the first to draw the regular figures of four-dimensional space in his article *Regular Figures in n -Dimensional Space* (Stringham 1880; fig. 4), published almost thirty years after Schläfli’s work. In the figures of solids, the different components, for example, tetrahedra, are simply drawn next to each other.

It is no coincidence that art historian Linda D. Henderson, in her extensive essay on the influence of ideas inspired by the fourth dimension and non-Euclidean geometry in art, despite having also studied in depth the ma-

Figure 2
Manning’s hypercube used by Noll for animation (MANNING 1914: 240).

Figure 3
Thomas Banchoff, *Hypercube*, 1976, frame from the film *Dimensions* by M. Emmer, 1984.

Charles Strauss realizzava, con computer più sofisticati, una prima versione del film *The Hypercube: Projections and Slicing* (Banchoff 1990). Il breve film in animazione computerizzata ebbe un grande impatto sia scientifico sia artistico: fu proiettato al Congresso mondiale dei matematici a Helsinki (1978) e nel 1986 fu inserito nella sezione *Spazio*, curata da Giulio Macchi per la Biennale di Venezia (Emmer 1986).

Erano le prime immagini in assoluto di un ipercubo in movimento, proiettato nello spazio tridimensionale euclideo. Dell’ipercubo, nel film si vedono solo gli spigoli, le loro proiezioni tridimensionali: immagini trasparenti, per far cogliere, allo stesso tempo, la parte dell’oggetto geometrico rivolta verso chi guarda e quella dall’altra parte, nascosta dietro e lateralmente. Banchoff ha in seguito collaborato alle animazioni computerizzate dei primi film della serie *Stars Wars* (fig. 3). Ma quando erano comparsi i primi disegni di un ipercubo, di un cubo a quattro dimensioni? Quando si era cominciato a pensare di disegnare oggetti a quattro dimensioni? Oggetti euclidei, bisogna precisare: il tempo non c’entra nulla. In diversi settori della matematica erano comparsi oggetti che avevano la necessità di utilizzare più di tre parametri per essere descritti. Nel concetto di “varietà” della geometria riemanniana comparivano spazi di dimensioni n qualsiasi: siamo nel 1854 (Riemann [1854] 1994).

Era ben noto da molti secoli che i solidi regolari dello spazio euclideo erano cinque; furono descritti nel *Timeo* di Platone e sono chiamati di conseguenza solidi platonici. Questi e molti altri tipi di solidi Leonardo da Vinci disegnò

per il famoso trattato sulla *Divina proporzione* del matematico Luca Pacioli, pubblicato a Venezia nel 1509 (Pacioli 1509).

2. I solidi in 4 dimensioni

La prima definizione di un cubo a tre dimensioni viene formulata nel libro degli *Elementi* di Euclide, 350 anni avanti Cristo circa: «Il cubo è una figura solida contenuta da sei quadrati eguali» (Commandino [1575] 2009: 209v *diffinitioni* XXV).

Un libro, quello di Euclide, su cui si baseranno la formazione culturale e la capacità di comprensione dell’umanità nell’immaginare l’idea di spazio. Il primo a determinare il numero degli ipersolidi regolari nello spazio a 4 dimensioni fu Ludwig Schläfli. Utilizzando la nomenclatura successiva di H.S.M. (Donald) Coxeter, essi sono: *regular simplex* {3, 3, 3}, *hypercube* {4, 3, 3}, *16-cell* {3, 3, 4}, *24-cell* {3, 4, 3}, *120-cell* {5, 3, 3}, *600-cell* {3, 3, 5}; “3, 3, 3” significa tre triangoli che si incontrano tre e a tre e così via (Coxeter 1947).

Il lavoro di Schläfli non fu per nulla apprezzato e quasi tutti i suoi studi non furono accettati per la pubblicazione. Solo sei anni dopo la sua morte, nel 1901, fu pubblicata la *Theorie der vielfachen Kontinuität* (Schläfli 1901) in cui Schläfli trattava della geometria a n dimensioni e, in particolare, dei solidi a quattro dimensioni, che chiamava *polyschem*.

La mancata attenzione ai lavori di Schläfli fu il motivo per cui molti ritengono che sia stato Washington Irving Stringham il primo a disegnare le figure regolari dello spazio a quattro dimensioni nel suo articolo *Regular Figures in n -Dimensional Space* (Stringham 1880; fig. 4), pubblicato quasi trent’anni dopo i lavori di Schläfli: nelle figure dei solidi, i diversi componenti, per esempio i tetraedri, sono semplicemente disegnati uno accanto all’altro.

Non è un caso che la storica dell’arte Linda D. Henderson, nel suo ampio saggio dedicato alle influenze delle idee ispirate alla quarta dimensione e alla geometria non euclidea, pur avendo studiato a fondo anche gli aspetti matematici delle questioni trattate, come mostra la vasta bibliografia specializzata riportata, non citi il lavoro di Schläfli (Henderson [1983] 2013: 106). A proposito di Stringham,

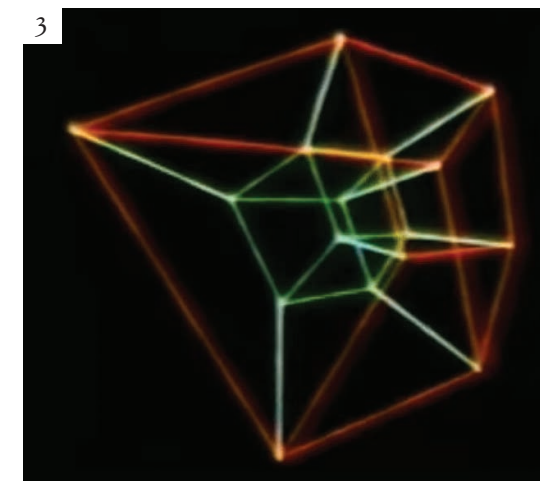


Figure 2
L’ipercubo di Manning usato da Noll per l’animazione (MANNING 1914: 240).

Figure 3
Thomas Banchoff, *Hypercube*, 1976, fotogramma dal film *Dimensions* di M. Emmer, 1984.

thematical aspects of the issues discussed, as shown by the vast specialized bibliography reported, does not cite Schläfli's work (Henderson [1983] 2013: 106). Regarding Stringham, Henderson observes that the article had a notable impact, so much so that numerous references to it can be found in the writings of both mathematicians and non-mathematicians of the early twentieth century.

Between 1900 and 1910, the various notions of the fourth dimension, developed in the previous century, became increasingly widespread, even beyond scholarly circles. This phenomenon was most widespread in the United States, where many popular magazines provided ample space for discussion of the novelty, and in Russia. Interest peaked in 1909, when «Scientific American» sponsored 'the best explanation of four-dimensional geometry', receiving 245 contributions from around the world. As Henderson pointed out, the fourth dimension was interpreted by all participants as a purely spatial phenomenon; time was never mentioned as a fourth dimension.

Given the complexity of drawing three- and two-dimensional projections, not all hypersolids have enjoyed equal success in literature and art. The most successful is certainly the hypercube (four-dimensional cube), or 'tesseract' as Charles Hinton called it.

3. Seeing Hyperspace

Coxeter began writing his book *Regular Polytopes* in February 1923. It was published in 1947. In chapter VII, "Ordinary Polytopes in Higher Space", Coxeter writes: "Polytope' is the natural term for the sequence point, segment, polygon, polyhedron... Most of the simple properties of polytopes are derived by pure analogy: for example, 2 points delimit a segment, 4 segments a square, 6 squares a cube, 8 cubes a hypercube, and so on" (Coxeter 1947: 118). He adds: "Only one or two people [and he is one of them!] have had the ability to visualize a hypersolid as simply and naturally as we ordinary mortals visualize a solid; but some skill in this direction can be acquired by contemplating the analogy from 1 to 2, then from 2 to 3, and by a sort of extrapolation from 3 to 4 dimensions" (Coxeter 1947: 119).

The artist Corrado Cagli, returning from the Second World War where he volunteered to participate in the Normandy landings, arrived in New York and discovered Coxeter's book in 1948. Cagli and the North American poet Charles Olson will make a sort of synthesis between Euclidean and non-Euclidean geometries, multi-dimensional spaces, and topology – an artistic synthesis, obviously. Even if non-Euclidean geometries, the fourth dimension, and topology are not entirely related topics, they are certainly linked to a word that interests any artist: the idea of 'space'. Cagli always cultivated, in addition to his interest in figurative art, a parallel interest in abstract and geometric forms. This led him to know and read books on mathematics, becoming interested in Riemann's non-Euclidean geometry and topology. With Coxeter's book, Cagli discovered the figures of four-dimensional space. He was fascinated by them: "When I speak of drawings in the fourth dimension, I mean my own, which obey the spirit and optical taste which the mathematician Donchian (Coxeter 1973: 272) expressed in his projections of solids in the fourth dimension. Speaking in an

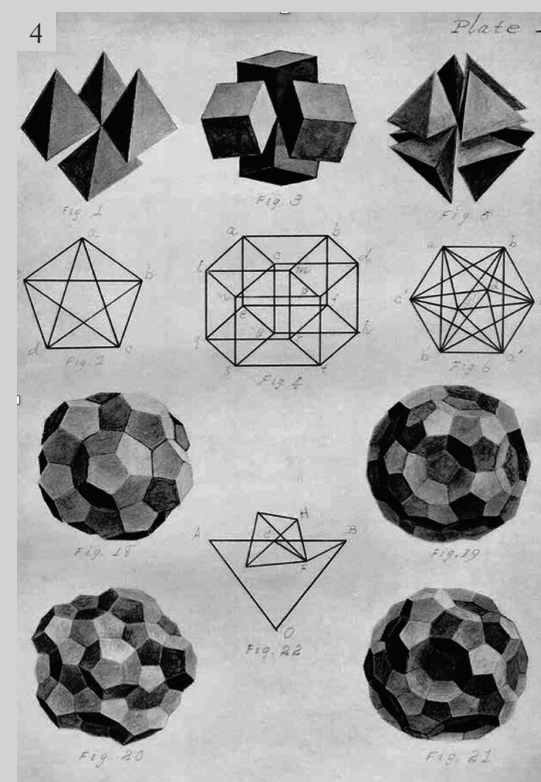


Figure 4
W.I. Stringham, regular
figures in n-dimensional space
(STRINGHAM 1880: plate 1).

la Henderson osserva che l'impatto dell'articolo è stato notevole, tanto che se ne trovano numerosi riferimenti negli scritti di matematici e non matematici dell'inizio del XX secolo.

Tra il 1900 e il 1910 le diverse nozioni sulla quarta dimensione, sviluppatesi nel secolo precedente, si diffusero sempre più, anche al di fuori della cerchia degli studiosi. Questo fenomeno si è maggiormente diffuso negli Stati Uniti, ove un gran numero di riviste popolari ha riservato ampio spazio alla discussione della novità, e in Russia. L'interesse ebbe il suo culmine nel 1909, quando «Scientific American» sponsorizzò "la migliore spiegazione della geometria a quattro dimensioni", ricevendo 245 contributi da tutto il mondo. Come ha sottolineato Henderson, la quarta dimensione fu interpretata da tutti i partecipanti come un fenomeno puramente spaziale; non venne mai menzionato il tempo come quarta dimensione. Data la complessità nel disegnare le proiezioni a tre e a due dimensioni, non tutti gli ipersolidi hanno avuto la stessa fortuna nella letteratura e nell'arte. Il più fortunato è sicuramente l'ipercubo: il cubo a quattro dimensioni o *tesseract*, come lo chiamò Charles Hinton.

3. Vedere l'iperspazio

Coxeter inizia a scrivere il libro *Regular Polytopes* nel febbraio 1923 e verrà pubblicato nel 1947. Nel capitolo VII "Ordinary Polytopes in Higher Space", Coxeter scrive: «polytope è il termine naturale della sequenza punto, segmento, poligono, poliedro... La più parte delle proprietà semplici dei politopi si ricava per pura analogia: ad esempio 2 punti delimitano un segmento, 4 segmenti un quadrato, 6 quadrati un cubo, 8 cubi un ipercubo e così via» (Coxeter 1947: 118). E aggiunge: «solo una o due persone [e lui è una di queste!] hanno avuto l'abilità di visualizzare un iper-solido in modo semplice e naturale come noi ordinari mortali visualizziamo un solido; ma una certa abilità in questa direzione può essere acquisita dal contemplare la analogia da 1 a 2, quindi da 2 a 3 e con una sorta di estrapolazione da 3 a 4 dimensioni» (Coxeter 1947: 119).

L'artista Corrado Cagli, al ritorno dalla Seconda Guerra Mondiale, dove era andato volontario partecipando allo sbarco in Normandia,

arriva a New York e scopre il libro di Coxeter nel 1948. Cagli e il poeta nordamericano Charles Olson faranno una sorta di sintesi tra geometrie euclidee e non euclidee, spazi a più dimensioni e topologia: una sintesi artistica, ovviamente. Anche se le geometrie non euclidee, la quarta dimensione, la topologia non sono argomenti del tutto correlati tra loro, sono certo legati ad una parola che interessa qualsiasi artista: l'idea di "spazio". Da sempre, Cagli coltivava oltre all'interesse per l'arte figurativa un interesse parallelo per le forme astratte e geometriche; il che lo porta a conoscere e leggere libri di matematica, interessandosi alla geometria non euclidea di Riemann e alla topologia. Con il libro di Coxeter, Cagli scopre le figure dello spazio a quattro dimensioni. Ne resta affascinato: «quando parlo di disegni nella quarta dimensione, mi riferisco ai miei che obbediscono allo spirito e al gusto ottico che il matematico Donchian (Coxeter 1973: 272) ha espresso nelle sue proiezioni di solidi nella quarta dimensione. Per essere elementare, ciò che appare come un cubo nello spazio tridimensionale, nello spazio a quattro dimensioni assumerà la forma di un ipercubo. Una volta compreso il significato spaziale antitetico di questi due solidi, diventa possibile vederli come misure di due diversi sistemi pittorici: il cubo come regola e misura di tutti i dipinti in tre dimensioni, l'ipercubo come regola e misura dei dipinti nella quarta dimensione [...] Su una pagina a due dimensioni, un disegno nella quarta assume solo una forza allusiva, non rappresentativa, e ho il forte sospetto che non saremo in grado di avventurarci nel campo poco esplorato delle n dimensioni finché non saremo disposti a rinunciare sia alla cornice che alla tela» (Cagli 1949).

Coxeter ricorda che, quando cerchiamo di comprendere l'idea di uno spazio euclideo a quattro dimensioni, siamo aiutati dall'immaginare gli sforzi che un ipotetico essere a due dimensioni farebbe per visualizzare il mondo tridimensionale: quello che accade esattamente in un mondo piatto. Il libro di Edwin A. Abbott *Flatland. A Romance of Many Dimensions* è pubblicato nel 1884. Diventerà presto uno dei libri più pubblicati in lingua inglese e in tantissime altre lingue (Abbott [1884] 2008).

Figura 4
W.I. Stringham, figure regolari
nello spazio a n-dimensioni
(STRINGHAM 1880: plate 1).

elementary way, what appears as a cube in three-dimensional space will take the form of a hypercube in four-dimensional space. Once the antithetical spatial meaning of these two solids is understood, it becomes possible to see them as the measures of two different pictorial systems, the cube as the rule and measure of all paintings in three dimensions, the hypercube as the rule and measure of paintings in the fourth dimension [...] On a two-dimensional page, a drawing in the fourth dimension takes on only an allusive, not a representational, force, and I strongly suspect that we shall not be able to venture into the little-explored field of n dimensions until we are not willing to give up both the frame and the canvas” (Cagli 1949). Coxeter points out that when we try to understand the idea of a four-dimensional Euclidean space, we are helped by imagining the efforts that a hypothetical two-dimensional being would make to visualize the three-dimensional world, exactly what happens in a flat world. Edwin A. Abbott’s book *Flatland. A Romance of Many Dimensions* was published in 1884. It soon became one of the most published books in the English language and in many other languages (Abbott [1884] 2008).

4. *Flatland*: The Discovery of Space

The protagonist, who lives in the flat world, is a square. The central event in his life is his encounter with a three-dimensional being, a sphere, which he obviously cannot see; he can only grasp the sections the sphere makes as it rises and falls on the plane where the square lives. The square sees only lines. In reality, he would not be able to see even those, but a sort of light gives the lines a certain thickness, making them visible (Abbott [1884] 2008: 167-168). “I – Most illustrious Sir, excuse my awkwardness, which arises not from ignorance of the usages of polite society, but from a little surprise and nervousness, consequent on this somewhat unexpected visit. And I beseech you to reveal my indiscretion to no one, and especially not to my Wife. But before your Lordship enters further communications, would he deign to satisfy the curiosity of one who would gladly know whence his visitor came?

Stranger – From Space, from Space, Sir: whence else?

I – Pardon me, my Lord, but is not your Lordship already in Space, your Lordship and his humble servant, even at this moment?

Stranger – Pooh! What do you know of Space? Define Space.

I – Space, my Lord, is height and breadth indefinitely prolonged.

Stranger – Exactly: you see, you do not even know what Space is. You think it is of two dimensions only; but I have come to announce to you a third-height, breadth, and length.

I – Your Lordship is pleased to be merry. We also speak of length and height, or breadth and thickness, thus denoting two dimensions by four names.

Stranger – But I mean not only three names, but three dimensions.

I – Would your Lordship indicate or explain to me in what direction the third dimension is, unknown to me?

Stranger – I came from it. It is up above and down below”.

The sphere becomes impatient, and at a certain point, it makes the square come out of the plane and fly above its flat country, which he had never seen in that way. As time passes, it comes to formulate other hypotheses, based on the analogy that will be the basis of every representation of a multi-dimensional object, in particular, the 4-dimensional hypercube (Abbott [1884] 2008: 205, 209).

“I – But my Lord has shown me the land of two dimensions by taking me with him into the land of three. What, therefore, more easy than now to take his servant on a second journey into the blessed region of the fourth dimension, where I shall look down with him once more upon this land of three dimensions, and see the inside of every three-dimensioned house, the secrets of the solid earth, the treasures of the mines of Spaceland”. And insists.

“In one dimension, did not a moving point produce a line with two terminal points?

In two dimensions, did not a moving line produce a square with four terminal points?

In three dimensions, did not a moving square produce – did not this eye of mine behold it – that blessed being, a cube, with eight terminal points?

4. *Flatland*: la scoperta dello spazio

Il protagonista che vive nel mondo piatto è un quadrato. L’avvenimento centrale della sua vita è l’incontro con un essere tridimensionale, una sfera, che lui ovviamente non può vedere: può cogliere solo le sezioni che la sfera fa, alzandosi ed abbassandosi, sul piano dove vive il quadrato. Il quadrato vede solo linee. In realtà non potrebbe vedere neppure quelle, ma una sorta di luce dà un certo spessore alle linee, rendendole visibili (Abbott [1884] 2008: 167-168).

«Io – Illustrissimo signore, perdonate la mia mala grazia, che non scaturisce dall’ignoranza degli usi della società civile, ma da una lieve sorpresa e agitazione, dovute a questa visita in qualche modo inattesa... Ma prima che la Signoria vostra si addentri in ulteriori comunicazioni, vorrebbe degnarsi di soddisfare la curiosità di uno che sarebbe lieto di conoscere la provenienza del suo ospite?

Straniero – Vengo dallo spazio. Dallo spazio, signore, da dove altro?

Io – Perdonatemi, ma la Signoria vostra non è già nello spazio? La Signoria Vostra e il suo umile servo non sono nello spazio anche in questo momento?

Straniero – Bah! Che cosa sapete voi dello spazio? Definitemelo lo spazio.

Io – Lo spazio, signore, è fatto di lunghezza e larghezza che si estendono all’infinito.

Straniero – Appunto: vedete che non sapete neanche che cos’è, lo spazio? Voi pensate che sia fatto solo di due dimensioni; ma io sono venuto per annunciarvene una terza: altezza, larghezza e lunghezza.

Io – La Signoria vostra ha voglia di scherzare. Anche noi parliamo di lunghezza e altezza, e di larghezza e spessore, definendo così due dimensioni con quattro nomi.

Straniero – Ma io non sto parlando semplicemente di tre nomi, ma di tre dimensioni.

Io – La Signoria vostra sarebbe così gentile da indicarmi o spiegarmi in che direzione si estenda questa terza dimensione a me ignota?

Straniero – È da lì che vengo. È qui sopra e qui sotto».

La sfera si spazientisce e, ad un certo punto, fa uscire dal piano il quadrato che vola sopra il suo paese piatto: non lo aveva mai visto così. E con il passare del tempo arriva a formulare del-

le altre ipotesi, basandosi sull’analogia che sarà la base di ogni rappresentazione di un oggetto a più dimensioni, in particolare l’ipercubo a 4 dimensioni (Abbott [1884] 2008: 205, 209).

«Io – Ma il mio signore mi ha mostrato le due dimensioni portandomi con sé nel paese delle tre dimensioni. Non c’è dunque niente di più semplice che guidare a questo punto il suo servo in un secondo viaggio nella regione beata della quarta dimensione, dall’alto della quale io guarderò insieme a lui ancora una volta questo paese delle tre dimensioni, e vedrò l’interno di ogni casa tridimensionale, i segreti della terra solida, i tesori di Spacelandia».

E insiste.

«In un mondo a una dimensione, un punto che si muove genera una linea con due vertici, giusto?

In due dimensioni, una linea che si muove genera un quadrato con quattro vertici.

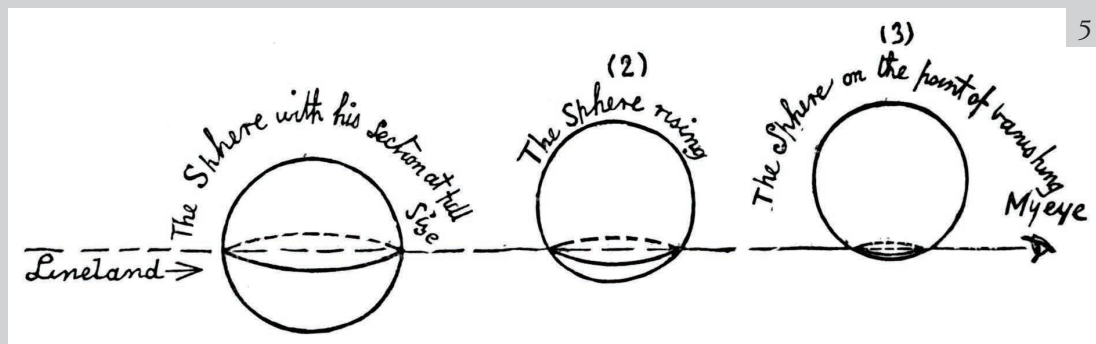
In tre dimensioni, un quadrato che si muove genera – l’ha visto questo mio occhio, no? – un cubo, quella creatura benedetta, con otto vertici, no?

E allora: nella quarta dimensione, un cubo che si muove – quale danno per l’analogia e per il progresso della verità, se non fosse così – dicevo, il movimento di un cubo divino non genererà un essere ancora più divino con sedici vertici?

Osserva l’infallibile conferma della serie numerica: due, quattro, otto, sedici: non è una progressione geometrica? Tutto ciò non è – se posso citare le parole del mio signore – “in stretto accordo con l’analogia”?

E ancora: il mio signore non mi ha insegnato che, come in una linea vi sono due punti di confine e in un quadrato quattro linee di confine, così in un cubo devono esserci sei quadrati di confine? Osserva ancora una volta la conferma della serie numerica: due, quattro, sei: non è una progressione aritmetica? E dunque, non ne consegue necessariamente che il frutto divino del venerabile cubo nella terra delle quattro dimensioni debba avere otto cubi di confine? E non è anche questo, come il mio signore mi ha insegnato a credere, “in stretto accordo con l’analogia”?».

Nella spiegazione del quadrato vi sono tutti gli elementi per disegnare il quadrato a 4 dimensioni. Ma nel libro di Abbott vi sono disegni (pochi) di oggetti al massimo tridimensionali,



And in four dimensions shall not a moving cube – alas, for analogy, and alas for the progress of truth, if it be not so – shall not, I say, the motion of a divine cube result in a still more divine organization with sixteen terminal points? Behold the infallible confirmation of the series, 2, 4, 8, 16: is not this a geometrical progression? Is not this – if I might quote my Lord's own words – 'strictly according to analogy'? Again, was I not taught by my Lord that as in a line there are two bounding points, and in a square there are four bounding lines, so in a cube there must be six bounding squares? Behold once more the confirming series, 2, 4, 6: is not this an arithmetical progression? And consequently does it not of necessity follow that the more divine offspring of the divine cube in the land of four dimensions, must have 8 bounding cubes: and is not this also, as my Lord has taught me to believe, 'strictly according to analogy'?"

The explanation of the square contains all the elements needed to draw a four-dimensional square. But Abbott's book contains only a few drawings of at most three-dimensional objects, represented on a plane. For example, the passage of the sphere through the plane where the square lives. Perhaps Abbott wasn't familiar with Stringham's drawings, although this seems strange given that, in addition to being a theologian and Shakespeare expert, he was also a mathematics professor at London College. Even though he didn't draw it, he provided all the elements needed to do so (fig. 5). Victor Schlegel was one of the mathematicians who contributed most to the birth of n -dimensional geometry at the end of the 19th century and produced models of four-dimensional hypersolids (fig. 6).

A few years later, the mathematician Esprit Jouffret wrote the two volumes *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions* in 1903 (Jouffret 1903) and *Mélanges de géométrie à quatre dimensions* in 1906 (Jouffret 1906). The method used by Jouffret to visualize four-dimensional objects was a kind of descriptive geometry in which these objects were projected onto the two-dimensional plane, the paper on which they were drawn. In many cases, the objects were rotated in order to obtain additional images and to give more information about their dimensions. Jouffret would have a notable influence on artists, the Cubists in particular (Emmer 2026; fig. 7).

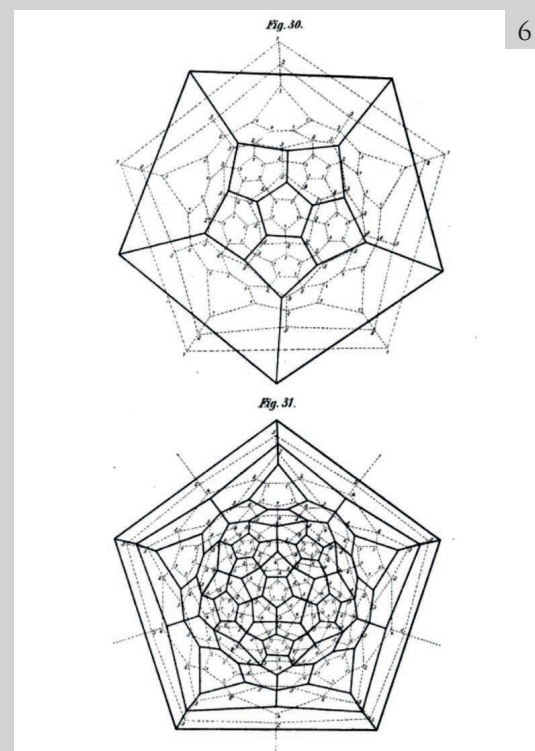


Figure 5
Edwin A. Abbott, the passage of the sphere (ABBOTT 1884: 174).

Figure 6
Victor Schlegel, homogeneously composed spatial structures (SCHLEGEL 1883: table XXI).

Figure 7
Esprit Jouffret, cavalier perspective of the sixteen fundamental octahedra (JOUFFRET 1903: 153).

rappresentati sul piano. Ad esempio, il passaggio della sfera nel piano dove vive il quadrato. Forse Abbott non conosceva i disegni di Stringham, anche se appare strano dato che, oltre che teologo ed esperto di Shakespeare, era docente di matematica al London College. Ma, pur non disegnandolo, ha fornito tutti gli elementi per poterlo disegnare (fig. 5). Victor Schlegel era stato uno dei matematici che avevano maggiormente contribuito alla nascita della geometria a n dimensioni alla fine del XIX secolo e aveva prodotto modelli di ipersolidi a quattro dimensioni (fig. 6). Qualche anno dopo il matematico Esprit Jouffret scrisse i due volumi *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions* nel 1903 (Jouffret 1903) e *Mélanges de géométrie à quatre dimensions* nel 1906 (Jouffret 1906). Il metodo usato da Jouffret per visualizzare gli oggetti a quattro dimensioni era una sorta di geometria descrittiva in cui tali oggetti venivano proiettati sul piano bidimensionale, il foglio su cui erano disegnati. In molti casi, gli oggetti venivano ruotati in modo da ottenere immagini addizionali, per dare maggiori informazioni sulle loro dimensioni. Jouffret avrà una notevole influenza sugli artisti, i cubisti in particolare (Emmer 2026; fig. 7).

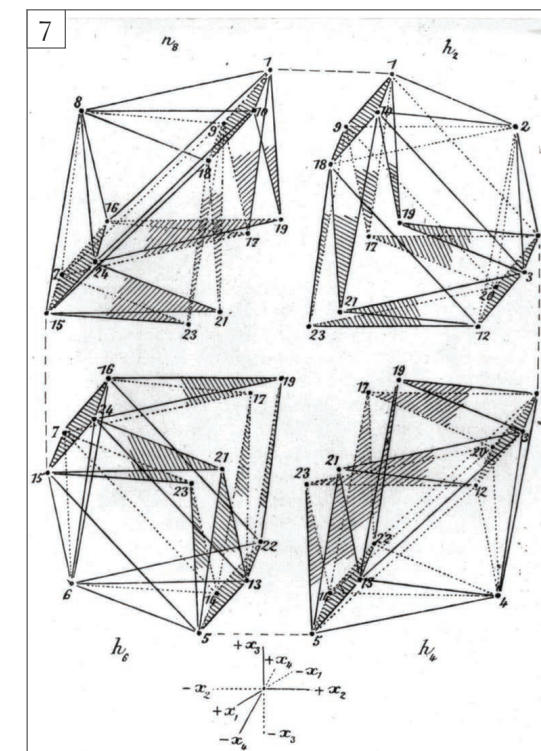


Figura 5
Edwin A. Abbott, il passaggio della sfera (ABBOTT 1884: 174).

Figura 6
Victor Schlegel, strutture spaziali composte in modo omogeneo (SCHLEGEL 1883: tav. XXI).

Figura 7
Esprit Jouffret, prospettiva cavaliera dei sedici ottaedri fondamentali (JOUFFRET 1903: 153).

5. Dalí e l'ipercubo

Otto anni dopo la pubblicazione del libro di Coxeter (Coxeter 1947), nel 1954 Salvador Dalí realizza un famoso quadro sulla crocefissione di Cristo, *Crucifixion Corpus Hypercubus*, sul modello del disegno di Manning. Banchoff negli anni Settanta contattò l'artista catalano, si incontrarono e Banchoff collaborò con suggerimenti per la realizzazione delle ultime opere di Dalí ispirate alla quarta dimensione.

6. Il film *Flatlandia*: dal disegno allo storyboard

Ho scoperto il libro *Flatlandia* verso la fine degli anni Settanta: ho pensato subito che sarebbe stato molto interessante, dal punto di vista visivo, realizzare un film basato sulla storia di Abbott. Il primo problema che mi sono posto è stato capire se potevo farlo tecnicamente. Avevo fin da subito pensato all'animazione, ma non con disegni; volevo utilizzare oggetti che fossero realmente a due e tre dimensioni, riuscendo a far vedere anche il cubo e la sfera a quattro dimensioni. Avevo cioè il problema, da un lato, di rendere in immagini i disegni del libro di Abbott e, dall'altro, di avere un modello estetico per i colori e le forme che, secondo me, doveva risalire più o meno agli inizi del Novecento. Avevo in mente alcune opere di Malevic. Non potevo utilizzare il colore che in *Flatlandia* non esisteva, tranne che per un breve periodo. Per la musica, di cui mi sono preoccupato sin dagli inizi, pensavo a due autori che ho sempre amato molto: Erik Satie e Darius Milhaud. Con una grande sorpresa da parte di Ennio Morricone, grande amico di mio padre Luciano Emmer, che realizza la musica della battaglia tra i triangoli.

Flatlandia è un mondo senza colori, con la luce; io volevo realizzare un film a colori senza i colori, solo con la luce. Diventava essenziale il materiale da utilizzare per rendere visibili i personaggi di *Flatlandia*: la chiave per costruire gli abitanti era la luce, la luminosità. Dovevano essere oggetti luminosi, ma non a colori; il colore doveva essere dato dalla luce. Occorreva quindi usare un materiale che fosse trasparente e che si riflettesse sui bordi, in modo tale che i lati degli abitanti di *Flatlandia* rilucessero. La loro vita, il loro esistere, dovevano identificarsi con il riflesso luminoso dei

5. Dalí and the Hypercube

Eight years after the publication of Coxeter's book (Coxeter 1947), in 1954 Salvador Dalí created a famous painting of the Crucifixion of Christ, *Crucifixion Corpus Hypercubus*, based on Manning's drawing. Banchoff contacted the Catalan artist, and they met in the 1970s. Banchoff collaborated with suggestions for Dalí's later works inspired by the fourth dimension.

6. The Film *Flatland*: From Drawing to Storyboard

I discovered the book *Flatland* in the late 1970s. I immediately thought it would be visually very interesting to make a film based on Abbott's story. The first problem I faced was how to do it technically. I had immediately considered animation, but not with drawings. I wanted to use objects that were truly two- and three-dimensional, while also showing the cube and sphere in four dimensions. That is, I had the problem, on the one hand, of translating the drawings from Abbott's book into images, and on the other, of having an aesthetic model for the colors and shapes, which I believed must date back to the early twentieth century. I had some works by Malevich in mind. I couldn't use color, which didn't exist in *Flatland*, except for a brief period. For the music, which I had been worried about from the beginning, I thought of two composers I've always loved, Erik Satie and Darius Milhaud. Ennio Morricone, who was a great friend of my father, Luciano Emmer, composed the music for the battle between the triangles.

Flatland is a world without color, with light. I wanted to make a color film without color, with only light. The material needed to make the characters of *Flatland* visible became essential. The key to creating the inhabitants was light, luminosity. They had to be luminous objects but not colored; the color had to be provided by light. Therefore, it was necessary to use a material that was transparent and reflected on the edges so that the sides of the inhabitants of *Flatland* glowed. Their life, their existence, had to be identified with the luminous reflection of their sides. Conversely, for the houses and trees, I envisioned a non-lumi-

nous, opaque material that would create contrast, that was dark, black.

The objects then – the triangles, the segments, the squares, the polygons, the circles – had to be quite small, given that some scenes, such as the battle, involved up to a hundred characters at a time. We needed to find a transparent material with reflective edges that could be cut into polygons measuring a few centimeters on a side.

Then another, purely geometric, problem arose. The story of *Flatland* takes place in a two-dimensional world; the square encounters the sphere, thereby discovering the three-dimensional world, and subsequently comes to dream of a four-dimensional world. Now, the camera is by its very nature a geometric operator that imprints on film (which can be considered two-dimensional) images of a reality that are (apparently) three-dimensional. Therefore, at the moment of projection, the two-dimensional film is projected, via a light source, onto the two-dimensional screen of the movie theater (or onto a television monitor).

The camera, in short, is ideal for visualizing the story of *Flatland* – which, I recall, is a story of worlds of different dimensions – without having to provide too much explanation, since the camera movements themselves allow us to experience the shifts in dimension firsthand. The problem was complicated by the need for shots featuring images of the inhabitants of *Flatland* that were both two-dimensional (as they see themselves) and three-dimensional (as we see them from above).

Another tricky question: Abbott himself suggests thinking of a table on which objects move. Here's the problem: imagine thin polygons moving on a table. To get a two-dimensional shot, as the inhabitants see each other, the camera must descend to the level of the table, that is, descend to the plane of *Flatland*. It seems easy! But in doing so, it also captures the table on which the objects are placed! You can even see the edge of the table! Not only that, the camera captures everything beyond the table, for example, the wall of the room surrounding the table. In short, it was necessary to invent a plane that allowed shots on the level of the edge of the table and that at the same time did not extend into the back-

loro lati. Al contrario, per le case e gli alberi pensavo a un materiale non luminoso, opaco, che creasse contrasto e fosse scuro, nero.

Gli oggetti poi – i triangoli, i segmenti, i quadrati, i poligoni, i cerchi – dovevano essere abbastanza piccoli, dato che alcune scene, per esempio la battaglia, prevedevano anche cento personaggi tutti insieme. Bisognava trovare un materiale trasparente, dai bordi riflettenti, che potesse essere tagliato in poligoni di pochi centimetri di lato.

Si presentava poi un altro problema squisitamente geometrico. La storia di *Flatlandia* si svolge nel mondo a due dimensioni; successivamente il quadrato incontra la sfera, scopre il mondo tridimensionale e arriva a sognare il mondo a quattro dimensioni. Ora, la macchina da presa è per sua natura un operatore geometrico che impressiona sulla pellicola (che si può considerare bi-dimensionale) immagini della realtà che sono (apparentemente) tridimensionali. Quindi, nel momento della proiezione, dalla pellicola bidimensionale si ha, tramite una sorgente luminosa, una proiezione sullo schermo bidimensionale della sala cinematografica (o sul monitor di un televisore). La macchina da presa, insomma, è l'ideale per rendere visiva la storia di *Flatlandia* – che, ricordo, è una storia di mondi di dimensioni diverse – senza dover fornire troppe spiegazioni, dato che sono gli stessi movimenti della macchina da presa a far provare di persona i passaggi di dimensione. Il problema era complicato dal fatto che, nelle riprese, bisognava avere immagini degli abitanti di *Flatlandia* che fossero bidimensionali (come loro si vedono) e tridimensionali (come noi li vediamo, dall'alto).

Altra questione complicata: lo stesso Abbott suggerisce di pensare a un tavolo su cui si muovono gli oggetti. Ecco il problema: immaginiamo dei poligoni, con un piccolo spessore, che si muovono su un tavolo. Per avere una ripresa bidimensionale, come si vedono tra loro gli abitanti, la macchina da presa deve scendere a livello del tavolo, cioè sul piano di *Flatlandia*. Sembra facile! Ma così facendo si riprende anche il tavolo su cui sono appoggiati gli oggetti! Si vede anche il bordo del tavolo! Non solo, la macchina da presa riprende tutto quello che c'è dove il ta-

volo finisce, per esempio il muro della stanza che circonda il tavolo. Insomma, occorre inventare un piano che consentisse le riprese a livello del bordo del tavolo e che, nello stesso tempo, non sfiorasse sullo sfondo. Bisognava, cioè, creare l'effetto ottico di una superficie che c'è (vi poggiano i personaggi) ma non si vede!

La soluzione trovata è stata quella di incurvare verso il basso la superficie anteriore del tavolo, dove era posizionata la macchina da presa, e di incurvarla verso l'alto posteriormente, in modo da ottenere un effetto di profondità infinita. Così facendo, però, dato che tutta la scena era illuminata dall'alto, la riflessione della luce dove il tavolo era incurvato era maggiore rispetto a dove il tavolo era piano. Inoltre, le due curvature – quella anteriore e quella posteriore – erano diverse. Quindi si è dovuto risolvere un problema geometrico: trovare la migliore curvatura sia sul davanti che sul retro del tavolo, in modo tale che la luminosità fosse eguale o perlomeno abbastanza simile. Il materiale usato, anche se può sembrare incredibile dai risultati visivi ottenuti, era la formica nera. L'illuminazione diffusa dall'alto crea l'effetto di un colore azzurro trasparente del fondo su cui i personaggi si muovono, che era quanto volevo. Sembra quasi che essi si muovano nel vuoto, su un piano immateriale.

Per realizzare i personaggi venne scelto il perspex, malgrado la difficoltà di tagliare figure geometriche di pochi centimetri da fogli larghi metri (fig. 8).

7. Storyboard

Bisognava disegnare la storia, le sequenze, a partire dal racconto di Abbott: dividere la storia in scene. Inoltre, per ottenere il giusto morbido movimento di ciascun personaggio (tenendo conto che nell'animazione ogni fotogramma è un'immagine staccata dalle altre, una foto, e ogni secondo di film è composto di ventiquattro fotogrammi) occorreva anche disegnare gli itinerari di ogni personaggio, la loro velocità. Ciascuno doveva avere un suo modo specifico di muoversi e una sua velocità caratteristica. Bisognava, insomma, disegnare la storia che Abbott aveva scritto.

ground. In other words, it was necessary to create the optical effect of a surface that is there (the characters are resting on it) but cannot be seen!

The solution was to curve the table's front edge, where the camera was placed, downward, and curve it upward at the back to create an infinite-depth effect. However, since the entire scene was lit from above, the reflection of the light where the table was curved was greater than where it was flat. Furthermore, the two curvatures – the front and the back – were different. Therefore, a geometric problem had to be solved: finding the best curvature for both the front and the back of the table so that the brightness was equal, or at least similar. The material used, even though it may seem incredible given the visual results, was black *Formica*. The diffused lighting from above creates the effect of a transparent blue background against which the characters move, which was exactly what I wanted. It almost seems as if they are moving in a void, on an immaterial plane.

Perspex was chosen to create the characters, even though it was very complicated to get the experts to cut characters just a few centimeters long from sheets several meters wide (fig. 8).

7. Storyboard

We had to design the story, the sequences, starting from Abbott's narrative, dividing the story into scenes. Furthermore, to achieve the right smooth movement for each character (keeping in mind that in animation each frame is a separate image, a photo, and each second of film is composed of twenty-four frames), we also had to design the paths of each character and their speed. Each had to have their own specific way of moving and their own characteristic speed. In short, we had to design the story Abbott had written.

Before this, of course, the screenplay was prepared. In the scenes and dialogue, I used, whenever possible, the scenes as Abbott had imagined them, cutting many because they were too complicated or because I had no idea how to create them (a typical example being the one-dimensional world). A major problem remained: how to bring the square and the



sphere together, and above all, how to show the square and future viewers of the film the divine, four-dimensional cube and sphere! The crew I had at my disposal consisted of three people, including myself. The scenes were created and filmed in a small theater, where the famous table with curved edges was set up; the camera was mounted on rails attached to the table, and the lights were mounted above it. All the shots were shot on 35mm film, the historic stock of high-end cinema. All the camera movements – zooms, tracking shots, close-ups – were precisely measured. Only one of us had animation experience; it took us all months to become proficient at creating the characters' movements (figs 9, 10).

Filming took a long time – several years – also because making a twenty-five-minute, all-animated 35mm film is incredibly expensive. As we progressed through the storyboard, the final scene became a problem: the encounter with the sphere and the vision of the hypercube. It risked remaining a film without an ending. But I had an ace up my sleeve: a great friend, Thomas Banchoff, who a few years earlier had made his film about the hypercube, which I've already mentioned, in 16 mm. For one of my films in the *Art and Mathematics* series, entitled *Dimensions*, while I was at Brown University in Providence, USA, where Banchoff worked, I asked him whether he had any idea how to bring the square and the sphere together. He replied that if I prepared the drawings I wanted to animate, he would create

Figure 8
Frame of the film *Flatlandia*, 1985-1990. © M. Emmer.

Figures 9-10
Michele Emmer, storyboard for the film *Flatlandia*, 1980-1985. © M. Emmer.

Prima di questo, naturalmente, si è preparata la sceneggiatura. Nelle scene e nei dialoghi ho utilizzato, quando è stato possibile, le scene come le aveva immaginate Abbott, tagliandone molte perché troppo complicate o perché non avevo idea di come realizzarle (esempio tipico, il mondo a una dimensione). Restava un grande problema. Come far incontrare il quadrato e la sfera e, soprattutto, come far vedere al quadrato e ai futuri spettatori del film il cubo e la sfera divini a quattro dimensioni! La *troupe* che avevo a disposizione consisteva di tre persone, me compreso. Le scene venivano realizzate e filmate in un piccolo teatro in cui era montato il famoso tavolo con i bordi incurvati; al tavolo era fissata, tramite binari, la macchina da presa, e sopra il piano erano sistemate le luci. Tutte le riprese sono state effettuate in pellicola 35 mm, la storica pellicola del grande cinema. Tutti i movimenti di macchina, zoom, carrellate, primi piani, erano millimetrati. Uno solo di noi aveva esperienza di animazione; ci vollero alcuni mesi perché diventassimo tutti abili nel realizzare i movimenti dei personaggi (figg. 9, 10).

Le riprese durarono molto tempo – alcuni anni –, anche perché realizzare un film in 35

mm tutto in animazione, della durata di venticinque minuti, costa moltissimo. Man mano che si procedeva nella realizzazione del film secondo lo *storyboard* si avvicinava il problema della scena finale: l'incontro con la sfera e la visione dell'ipercubo. Rischiava di restare un film senza finale. Ma avevo un asso nella manica: un grande amico, Thomas Banchoff, che qualche anno prima aveva realizzato il film sull'ipercubo, di cui ho già parlato, in 16 mm. Per uno dei miei film della serie *Arte e matematica* dal titolo *Dimensioni*, mentre ero alla Brown University di Providence, negli USA, dove lavorava Banchoff, gli chiesi se avesse idea di come far incontrare il quadrato e la sfera. Mi disse che, se gli preparavo i disegni che volevo fossero animati, lui avrebbe realizzato la sequenza con la computer grafica. In una notte la sequenza venne realizzata in 16 mm.

Inoltre, Banchoff e i suoi colleghi stavano realizzando il nuovo film sulla sfera a quattro dimensioni. Restammo d'accordo che, una volta finito il suo film, mi avrebbe mandato una sequenza per concludere il mio. Ecco che, alla fine di *Flatlandia*, ci sono due minuti di animazione computerizzata per realizzare il

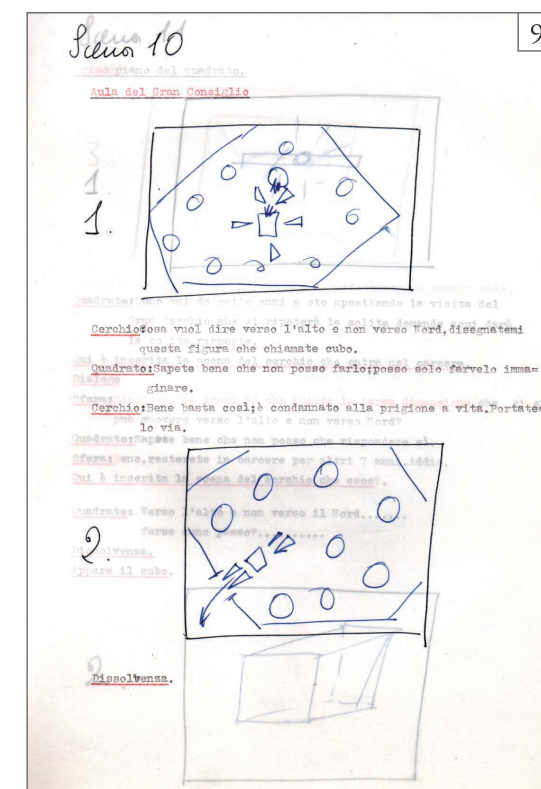
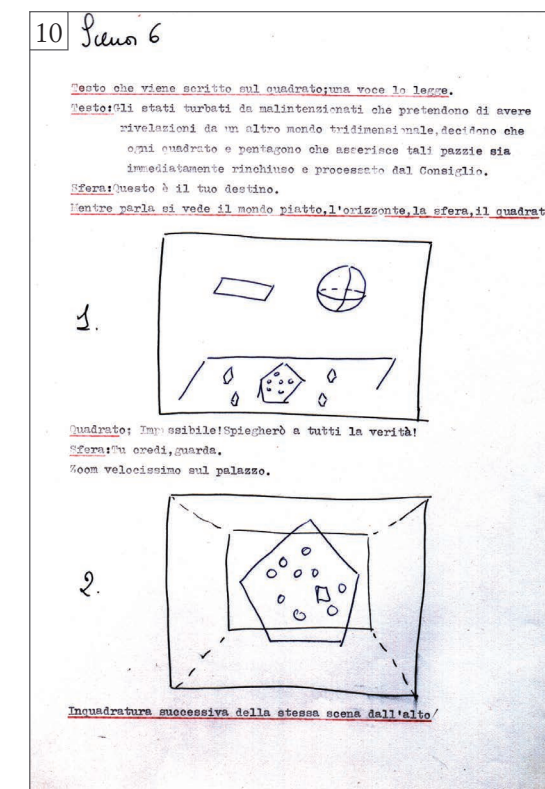


Figura 8
Fotogramma dal film *Flatlandia*, 1985-1990. © M. Emmer.

Figure 9-10
Michele Emmer, storyboard for the film *Flatlandia*, anni 1980-1985. © M. Emmer.



the sequence using computer graphics. In one night, the sequence was shot on 16 mm film. Banchoff and his colleagues were also making a new film about the four-dimensional sphere. We agreed that once his film was finished, he would send me a sequence to conclude mine. So, at the end of *Flatland*, there are two minutes of computer animation to realize the square's dream of seeing the four-dimensional sphere. It was 1986. The cut between the previous images created with real three-dimensional objects and the final two minutes created with computer graphics highlights the distance between the world of the square and the world of virtual reality. A visually appealing sequence, the best possible conclusion to the story and the film. A conclusion that, obviously, I hadn't even imagined when I started the film. Not only did that ending not yet exist, but it

couldn't even be technically realized. I am very happy with the final result of *Flatland*. The most interesting part, as far as I'm concerned, is that, although I usually dealt with very abstract mathematics, I had to deal with a large number of practical problems, whose origins, however, also lay in questions of a geometric nature. Furthermore, the role of drawing was fundamental. Geometric drawing, of course, since this is what the story is about; I had to draw and build a geometric world that Abbott's imagination had described without going into too much detail. A great imagination in imagining, a great concreteness in realizing; also taking into account the economic aspect, which could not be overlooked. In short, a concrete example of the interconnection between drawing, geometry, mathematics, art, cinema, and music. An unforgettable experience (Abbott [1884] 2008).

References / Bibliografia

- ABBOTT E.A. ([1884] 2008), *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, Oxford, Basil Blackwell; ed. it. con testo inglese a fronte a cura di M. Emmer, *Flatlandia. Un'avventura di molte dimensioni*, Torino, Bollati Boringhieri (con il film d'animazione Flatlandia, 1990, DVD, 25').
- BANCHOFF T. (1990), *Beyond the Third Dimension*, New York, Scientific American Library.
- CAGLI C. (1949), *Proiettiva e disegno di quarta dimensione*, Roma, Istituto Grafico Tiberino, catalogo della mostra (Roma, Galleria del Secolo, 4 - 16 giugno 1949).
- COMMANDINO F. ([1575] 2009), *De gli Elementi d'Euclide libri quindici, tradotti in lingua latina prima e hora d'ordine dell'istesso trasportati nella nostra vulgare*, Urbino, Frisolino editore, 11; ristampa anastatica a cura di V. Gavagna, E. Gamba, Urbino, Accademia Raffaello.
- COXETER H.S.M. (1947), *Regular Polytopes*, London, Methuen; 2nd edition London, Pitman Publishing, 1948.
- COXETER H.S.M. (1973), *Regular Polytopes*, New York, Dover Publications.
- EMMER M. (1986), *Lo spazio tra matematica e arte*, in CALVESI M., a cura di, *XLII Esposizione internazionale d'arte La Biennale di Venezia: arte e scienza*, Firenze, Electa Editrice, pp. 36-39.
- EMMER M. (2021), *Computer Art*, in TRIONE V., DELLA VALLE V., a cura di, *Enciclopedia dell'arte contemporanea*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, A, pp. 594-596.
- EMMER M. (2026), *Il tempo dello spazio immaginario. Da Picasso a Zaha Hadid*, Milano, Silvana Editoriale (in corso di stampa).
- FOSSA MARGUTTI F., a cura di (2026), *La dimensione di Flatlandia, intervista a Michele Emmer*, «Rivista La Biennale di Venezia», 2 («Emisferi/Hemispheres»), pp. 186-195.

sogno del quadrato di vedere la sfera a quattro dimensioni. Era il 1986. Lo stacco tra le immagini precedenti realizzate con oggetti tridimensionali reali e gli ultimi due minuti, realizzati con la *computer graphics*, rende visibile la distanza tra il mondo del quadrato e il mondo della realtà virtuale. Una sequenza visivamente molto attraente, la miglior conclusione possibile della storia e del film. Una conclusione che, quando iniziai il film, non avevo ovviamente nemmeno immaginato: non solo quel finale non esisteva ancora, ma non poteva neppure essere realizzato tecnicamente. Sono molto contento del risultato finale di *Flatlandia*. La parte più interessante, per quanto mi riguarda, è che, pur essendomi occupato di

matematica molto astratta, mi sono qui dovuto confrontare con un gran numero di problemi pratici, la cui origine, però, risiedeva anche in questioni di carattere geometrico. Inoltre, il ruolo del disegno è stato fondamentale. Disegno geometrico, naturalmente, dato che di questo tratta la storia; ho dovuto disegnare e costruire un mondo geometrico che la fantasia di Abbott aveva descritto senza entrare troppo nei dettagli. Una grande fantasia nell'immaginare, una grande concretezza nel realizzare; tenendo conto anche dell'aspetto economico, che non poteva essere trascurato. Insomma, un esempio concreto di interconnessione tra disegno, geometria, matematica, arte, cinema e musica. Un'esperienza indimenticabile (Abbott [1884] 2008).

- JOUFFRET E. (1903), *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions*, Paris, Gauthier-Villars.
- JOUFFRET E. (1906), *Mélanges de géométrie à quatre dimensions*, Paris, Gauthier-Villars.
- HENDERSON L.D. ([1983] 2013), *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton, Princeton University Press; revised edition, Boston, The MIT Press.
- MANNING H.P. (1914), *Geometry of Four Dimensions*, London, The Macmillan Company. *Internet Archive*, <https://archive.org/details/geometryoffourdi033495mbp/page/n253/mode/2up> (last access 15/5/2026).
- NOLL A.M. (2016), *The Howard Wise Gallery Show Computer-Generated Pictures (1965): a 50th Anniversary Memoir*, «Leonardo», 49, 3, pp. 232–239.
- PACIOLI L. (1509), *Divina proportione*, Venezia, A.P. Paganinus characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat. *Internet Archive*, <https://archive.org/details/divinaproportion00paci/page/n137/mode/2up> (ultima consultazione 15/5/2016).
- RIEMANN B. ([1854] 1994), *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria. E altri scritti scientifici e filosofici*, a cura di R. Pettoello, Torino, Bollati Boringhieri, p. XXVIII.
- SCHLÄFLI L. (1901), *Theorie der vielfachen kontinuierität*, «Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft», 38, pp. 1-237.
- SCHLEGEL V. (1883), *Theorie der homogen zusammengesetzten raumgebilde*, «Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher», 44, 4, pp. 341-459 (plus tables XIV-XXII). <https://play.google.com/books/reader?id=4H3mAAAAAMAAJ&pg=GBS.PT15&hl=it> (last access 15-5-26).
- STRINGHAM W.I. (1880), *Regular Figures in n-Dimensional Space*, «American Journal of Mathematics», 3, 1, pp.1-14. DOI: <https://doi.org/10.2307/2369441>.